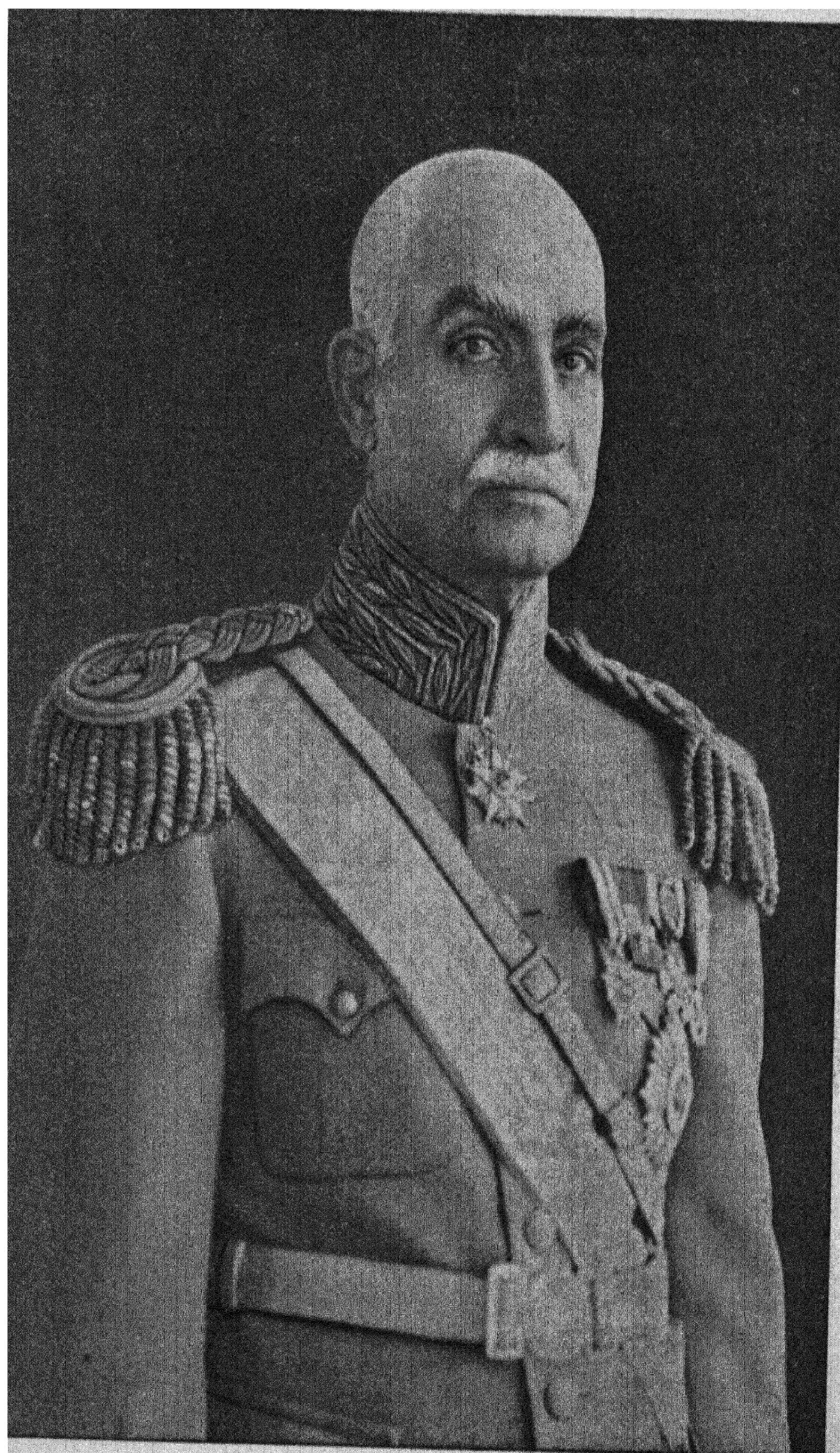




توانا بود هر که دانا بود

وزارت فرهنگ

مثلثات

برای سال پنجم دبیرستانها

۱۳۲۰

چاپخانه ایران

آغاز

در این عصر خجسته که ارادهٔ خسروانهٔ شاهنشاه دانش‌پرور اعلیحضرت رضا شاه پهلوی و توجهات حکیمانهٔ والاحضرت همایون ولایتعهد بتوسعه و ترقی علوم و فنون و رفع هرگونه نقص و اختلاف در شئون اجتماعی کشور معطوف است، وزارت فرهنگ لازم دانست که برنامهٔ آموزشگاهها را با این منظور عالی کاملا موافق نماید، و نخست باصلاح برنامهٔ تحصیلات متوسطه پرداخت، و چون اجراء برنامه بی اصلاح کتب درسی سودمند نبود در تاریخ ۲۷ مهرماه ۱۳۱۷ تصویب‌نامه از هیئت وزیران گذرانید که نگارش کتب دبیرستانی را بر نسق واحد و داشتن شرایط لازم ایجاب میکرد، و بموجب آن هیئتی از استادان و دانشیاران و دبیران که پیشینهٔ تألیف و تدریس داشتند بنام کمیسیون تهیه و چاپ کتب برگزیده شد تا برای انجام این امر مقرراتی وضع کنند که همه کتب دبیرستانی بر طبق یک اسلوب مطلوب و موافق با اصول آموزش و پرورش نگارش یافته علاوه بر مواد علمی و ادبی مؤید خصال ملی و ملکات راسخه باشد که از عهد باستان سرشتهٔ نهاد ایرانیان بوده، مانند میهن‌پرستی و شاه‌دوستی

و راست گفتاری و درست کرداری و دیگر صفات و اخلاق نیکو که منظور اصلی از

هر تعلیم و تربیت میباشد .

سپس به پیشنهاد این کمیسیون تألیف کتاب درسی هر یک از مواد برنامه بچند تن

از کسانی که آزموده و شایستگی داشتند ارجاع شد .

اینک کتاب مثلثات برای سال پنجم دبیرستانها که تألیف آن به :

آقای محمّد وحید مدیر کلّ وزارت فرهنگ

آقای تقی فاطمی استاد دانشگاه

واگذار شده بود از طرف وزارت فرهنگ منتشر میشود که در همهٔ دبیرستانهای

پسران و دختران کشور منحصراً تدریس شود .

وزیر فرهنگ

[signature]

بخش نخست

مراجعه بدرس های پیش

۱- پیش از شروع برنامه امسال دستورها و اتحادهای مهم مثلثاتی را که سال پیش خوانده ایم از نو یادآوری مینمائیم.

این دستورها را طوری باید آموخت که در بکار بردن آنها هیچ تردیدی نباشد و در هر مسئله بدانیم کدامیک از آنها باید بکار برده شود:

دستورها و اتحادهای مهم

دستور تبدیل یکه های کمان بیکدیگر (α اندازه کمان بحسب رادیان - n و n' اندازه آن بترتیب با زینه و گراد):

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{n}{180} = \frac{n'}{200} \qquad (1)$$

بستگی های میان پردازشهای مثلثاتی یک کمان (یا یک گوشه):

$$\cos^{۲} x + \sin^{۲} x = ۱ \qquad (۲)$$

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (۳)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{۱}{tg\, x} \qquad (۴)$$

$$\frac{۱}{\cos^{۲} x} = ۱ + tg^{۲} x \qquad (۵)$$

$$\frac{۱}{\sin^{۲} x} = ۱ + \cot^{۲} x \qquad (۶)$$

جدول خطهای مثلثاتی برخی از کمانها (یا گوشه‌ها)

A	$۰°$ یا ۰	$۳۰°$ یا $\frac{\pi}{۶}$	$۴۵°$ یا $\frac{\pi}{۴}$	$۶۰°$ یا $\frac{\pi}{۳}$	$۹۰°$ یا $\frac{\pi}{۲}$
$\sin A$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
$\cos A$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$tg\, A$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞
$\cot A$	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

اندازهٔ جبری کمانهائیکه سرِ آنها در A و تهٔ آنها در M است :

$$(۷) \quad \begin{cases} \overset{\frown}{AM} = \alpha + ۲K\pi \\ \overset{\frown}{AM} = n^{\circ} + K \cdot ۳۶۰^{\circ} \\ \overset{\frown}{AM} = n^{g} + K \cdot ۴۰۰^{g} \end{cases}$$

α رادیان و n زینه و n' گراد اندازهٔ جبری یکی از کمانهای AM است
و K عدد درست)

اندازهٔ جبری گوشهٔ میان دو نیم خط یا دو آسه (ox پهلوی نخست و
oy پهلوی دوّم گوشه) :

$$(7)\quad \begin{cases} (ox, oy) = \widehat{xoy} = \alpha + 2K\pi \\ (ox, oy) = \widehat{xoy} = n^{\circ} + K \cdot 360^{\circ} \\ (ox, oy) = \widehat{xoy} = n'^{g} + K \cdot 400^{g} \end{cases}$$

کمانهائی که یکی از پردازشهای مثلثاتی آنها داده شده است .

اگر داشته باشیم $\sin x = \sin \alpha$
یعنی اگر گوشه ای مانند α بشناسیم که سینوس آن برابر سینوس گوشهٔ x باشد خواهیم داشت:

$$(8)\quad \begin{cases} x = \alpha + 2K\pi \\ x = \pi - \alpha + 2K\pi \end{cases}$$ و یا

اگر داشته باشیم $\cos x = \cos \alpha$

خواهیم داشت : $$(9)\quad x = \pm\alpha + 2K\pi$$

اگر داشته باشیم $tg x = tg \alpha$

خواهیم داشت : $x = \alpha + K\pi$ (۱۰)

واگر داشته باشیم $\cot x = \cot \alpha$

خواهیم داشت : $x = \alpha + K\pi$ (۱۱)

یعنی بعبارت دیگر :

(۸) $$\text{arc} \sin(\sin \alpha) = \begin{cases} \alpha + 2K\pi \\ \pi - \alpha + 2K\pi \end{cases}$$

(۹) $$\text{arc} \cos(\cos \alpha) = \pm \alpha + 2K\pi$$

(۱۰) $$\text{arc } tg(tg \alpha) = \alpha + K\pi$$

(۱۱) $$\text{arc} \cot(\cot \alpha) = \alpha + K\pi$$

[arc sin (sin α) (arc با a کوچک) یعنی کمانی که سینوس آن برابر سینوس α است]

تبصره - غرض از arc sin a (A بزرگ) کمانیست α میان $-90°$ و $+90°$ که سینوس آن برابر a باشد :

(۸') $$\text{Arc} \sin a = \alpha \qquad -90° \leq \alpha \leq +90°$$

همچنین $\text{Arc}\cos a$ کمانیست میان ۰ و ۱۸۰ که سینوس متمم آن a باشد

$$0° \leqslant \text{Arc}\cos a \leqslant 180° \qquad (9)$$

همچنین $\text{Arc}\,tg\, a$ کمانی است میان ‎-۹۰°‎ و ‎+۹۰°‎ که تانژانت آن a باشد

$$-90° \leqslant \text{Arc}\,tg\, a \leqslant +90° \qquad (10)$$

همچنین $\text{Arc}\cot a$ کمانی است میان ۰ و ۱۸۰ که تانژانت متمم آن a باشد

$$0° \leqslant \text{Arc}\cot a \leqslant 180° \qquad (11)$$

بستگی میان خط های مثلثاتی برخی از کمانها (یا گوشه ها)

الف ـ کمانهای مکمّل ـ دو کمان مکمّل دارای یک سینوس میباشند ولی دیگر خط های مثلثاتی آنها قرینهٔ یکدیگرند :

$$(12)\quad \begin{cases} \sin(\pi - a) = \sin a. \\ \cos(\pi - a) = -\cos a \\ tg(\pi - a) = -tg\, a \\ \cot(\pi - a) = -\cot a \end{cases}$$

ب ـ کمانهای قرینه ـ دو کمان قرینه دارای یک سینوس متمم میباشند ولی دیگر

خط‌های مثلثاتی آنها عددهائی میباشند قرینه یکدیگر :

$$(۱۳)\quad \begin{cases} \sin(-a) = -\sin a \\ \cos(-a) = \cos a \\ tg(-a) = -tg\, a \\ \cot(-a) = -\cot x \end{cases}$$

ج ـ کمانهائی که تفاضل آنها برابر π است ـ تانژانت این کمانها و همچنین تانژانت متمم آنها یکی است ولی سینوس آنها قرینهٔ یکدیگرند و همچنین سینوس متمم آنها :

$$(۱۴)\quad \begin{cases} \sin(x+\pi) = -\sin x \\ \cos(x+\pi) = -\cos x \\ tg(x+\pi) = tg\, x \\ \cot(x+\pi) = \cot x \end{cases}$$

د ـ کمانهای متمم ـ چنانکه از نام خط‌های مثلثاتی هم برمیآید داریم :

$$(۱۵)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \sin x \\ tg\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \cot x \\ \cot\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = tg\, x \end{cases}$$

هـ - کمانهائی که تفاضل آنها برابر یک چهارم پیرامون است :

$$(۱۶)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \\ tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-tg\,x \end{cases}$$

خلاصه - بطور کلّی اگر x را بمضرب جفتی از °۹۰ بیفزائیم یا از آن کم کنیم کمانی بدست میآید که خط های مثلثاتی آن همنام خط های مثلثاتی x میباشد - واگر x را به مضرب تاقی از °۹۰ بیفزائیم یا از آن کم کنیم خط های مثلثاتی کمان حاصل همنام خط های مثلثاتی متمّم x خواهد بود .

برای بدست آوردن نشانه کافی است x را میان °۰ و °۹۰ بگیریم و به بینیم آیا جای تهِ کمان حاصل روی چه بخشی از پیرامون دایره مثلثاتی است مثلاً بفرض اینکه x میان °۰ و °۹۰ باشد x - °۲۷۰ کمانی است که تهِ آن در بخش سوم میافتد پس سینوس متمم آن منفی است بنابرین :

$$\cos(۲۷۰°-x)=\cos(۳\times۹۰°-x)=-\sin x$$

همچنین

$$\sin(-180^\circ + x) = \sin(-2 \times 90^\circ + x) = -\sin x$$

پردازش های مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو کمان (یا دو گوشه)

(۱۷) $$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$$

(۱۸) $$\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$$

(۱۹) $$\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$$

(۲۰) $$\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b$$

(۲۱) $$tg(a+b) = \frac{tg a + tg b}{1 - tg a . tg b}$$

(۲۲) $$tg(a-b) = \frac{tg a - tg b}{1 + tg a . tg b}$$

پردازش های مثلثاتی یک کمان از روی پردازش های مثلثاتی نیمه آن کمان - ($2a$ از روی a)

(۲۳) $$\sin 2a = 2\sin a . \cos a$$

(۲۴) $$tg\, 2a = \frac{2\, tg a}{1 - tg^2 a}$$

(۲۵) $$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

توان دوم سینوس و سینوس متمم یک کمان از روی سینوس متمم کمان دو برابر.

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad (26)$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad (27)$$

عبارت پردازش های مثلثاتی a بحسب $tg\frac{a}{2}$ گویا است:

$$\sin a = \frac{2\,tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}} \qquad (28)$$

$$\cos a = \frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}} \qquad (29)$$

$$tg\, a = \frac{2\,tg\frac{a}{2}}{1-tg^2\frac{a}{2}} \qquad (30)$$

گشایش سه بر های راست گوشه ـ C گوشه راست c وتر a و b پهلوهای روبرو به گوشه های تند A و B

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (31)$$

$$A + B = 90^\circ \qquad (32)$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B \qquad (33)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B \qquad (34)$$

$$tg\,A = \frac{a}{b} = \cot B \qquad (۳۵)$$

تصویرها - قضیّهٔ ۱ - تصویر راست گذر یک بُردار روی یک آسه برابر است با حاصل ضرب اندازهٔ جبری بردار در سینوس متمّم گوشهٔ میان آسه ایکه بُردار روی آن نشسته و آسهٔ تصویر.

قضیّهٔ ۲ - تصویر برآیند دو (یا چند) بُردار روی یک آسه برابر است با حاصل جمع جبری تصویرهای آن دو (یا چند) بُردار روی همان آسه.

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- آیا $\sin 45°$ بزرگتر است یا $\frac{1}{2} \sin 90°$ ؟ $\sin 60°$ یا $2 \sin 30°$ ؟ $\cos 30°$ یا $\frac{1}{2} \cos 60°$ ؟ $tg \frac{\pi}{6}$ یا $\cot \frac{\pi}{3}$ ؟

۲- بفرض اینکه $\sin a = \frac{1}{3}$ باشد حساب کنید $\cos a$ و $tg\,a$ را.

۳- این برابریها را ثابت کنید:

$$tg 60° \cdot tg 30° = \cot 30° \cdot tg 60° = tg 45°$$

$$tg 60° \cos^2 45 = \cos 30° \sin 90°$$

$$tg x \cdot \cos x = \sin x$$

$$\cot x \cdot \sin x = \cos x$$

$$\frac{1 - tg^2 30^\circ}{1 + tg^2 30^\circ} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cos 0^\circ$$

$$(tg x + \cot x) \sin x \cdot \cos x = 1$$

$$\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \sin 90^\circ$$

۴- بفرض اینکه $A = 0^\circ$, $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$, $D = 60^\circ$, $E = 90^\circ$ باشد حاصل عبارت زیر چیست؟

$$(\sin B + \sin E)(\cos A + \cos D) - 4 \sin A (\cos C + \sin E)$$

۵- ته کمان x در چه بخشی از دایره است هرگاه

$\sin x$ و $\cos x$ هردو منفی باشند؟

$\sin x$ مثبت و $\cos x$ منفی باشد؟

$tg x$ و $\cot x$ هردو مثبت باشند؟

۶- آیا کمانی هست که تانژانت آن مثبت و تانژانت متمم آن منفی باشد؟

۷- از عددهای زیر

$3 ; -\frac{1}{2} , a , -b , \infty , 0$ کدام میتواند برابر $\sin x$ باشد و کدام

برابر $tg\,x$ ؟

۸- اندازهٔ کمانهای زیر چیست؟

$arc\ tg\ \sqrt{3}$	$Arc\ tg\ \sqrt{3}$
$arc\cos 0$	$Arc\cos 0$
$arc\cos\sqrt{\frac{3}{2}}$	$Arc\cos\sqrt{\frac{3}{2}}$
$arc\sin 0$	$Arc\sin 0$
$arc\ tg\ 1$	$Arc\ tg\ 1$
$arc\cot(-\sqrt{3})$	$Arc\cot(-\sqrt{3})$
$arc\cos\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$Arc\cos\frac{-\sqrt{2}}{2}$
$arc\sin\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$Arc\sin\frac{-\sqrt{3}}{2}$
$arc\sin\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$Arc\sin\frac{-\sqrt{2}}{2}$
$arc\ tg\ (-1)$	$Arc\ tg\ (-1)$

۹- برابر هریک از پردازشهای زیر را بگوئید:

$\cos(arc\cos x)$	$\sin(arc\sin x)$

$tg(\text{arc}\, tg\, x)$ — $\cot(\text{arc}\cot x)$

$tg\,[\text{arc}\cos(-1)]$ — $\cos(\text{arc}\; tg\,\infty)$

$\cos(\text{Arc}\sin 0)$ — $\cos(\text{arc}\sin 0)$

$\sin(\text{arc}\cos 1)$ — $\sin[\text{arc}\; tg\,(-1)]$

۱۰ـ در چند دقیقه عقربک دقیقه شمار $\frac{3\pi}{2}$ ـ رادیان خواهد گشت؟

۱۱ـ در ۳۴ دقیقه و ۳۷,۵ ثانیه عقربک ساعت شمار چه گوشه ای می پیماید؟

ورزش

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید:

$$\frac{tg\,x}{\cos x} = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} + \sin x \qquad (۱)$$

$$\frac{\cos a}{1+\sin a} + \frac{1+\sin a}{\cos a} = \frac{2}{\cos a} \qquad (۲)$$

$$\frac{1+\cos a}{1-\cos a} = 1 + \frac{2\cos a(1+\cos a)}{\sin^2 a} \qquad (۳)$$

$$\frac{\cot x}{\sin x} = \frac{\cos x}{1-\cos^2 x} \qquad (۴)$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x \qquad (۵)$$

$$1-\sin x)(\frac{1}{\cos x} - tg\,x) = \cos x \qquad (۶)$$

$$(1 - tg\, y)(1 - \cot y) = 2 - \frac{1}{\sin y \cos y}$$ (۷)

$$\frac{tg\, x - \sin x}{\sin^3 x} \cdot \cos x = \frac{1}{1 + \cos x}$$ (۸)

$$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - 2 \sin^2 a \cdot \cos^2 a$$ (۹)

$$(tg\, \alpha + \cot \alpha)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$ (۱۰)

$$\frac{\cos x \cdot tg\, x}{\sin^3 x} \sin x = \frac{\cos^2 x}{\quad}$$ (۱۱)

$$\frac{\cot a - tg\, x}{\cos a + \sin a} = \frac{\cos a - \sin a}{\cos a \cdot \sin a}$$ (۱۲)

$$\left(\frac{\cos \alpha}{tg\, \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cot \alpha}\right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$ (۱۳)

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{\cos x} - tg\, x$$ (۱٤)

$$\frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{\cos^{m-2} x} = \frac{1}{\cos^{m-2} x} \cdot tg^2 x$$ (۱۵)

$$tg\, x - 3 \cot x + tg\, x (1 + 3 \cot^2 x) = 2\, tg\, x$$ (۱۶)

$$\frac{a \cdot \sin a \cdot \cos x - b \sin x \cdot \cos x}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{(a - b)\, tg\, x}{a\, tg^2 x + b}$$ (۱۷)

$$b - \frac{a(a \cos x - b \sin x)}{a \sin x + b \cos x} = \frac{a^2 + b^2}{a\, tg\, x + b}$$ (۱۸)

$$\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - x + tg\, x = tg^2 x$$ (۱۹)

پاسخهای هم‌چندیهای زیر را که میان ۰ و ۳۶۰ میباشد بدست آورید:

(۲۰) $tg^2 x = 1$ [پاسخ : ۴۵° ، ۱۳۵° ، ۲۲۵° ، ۳۱۵°]

(۲۱) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

(۲۲) $(tg^2 x - 3)(1 - 2\sin x) = 0$

(۲۳) $\sqrt{2}\, tg\, x \cdot \sin x - tg\, x = 0$

(۲۴) $\frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x = 1$

(۲۵) $2\sin^2 x + \sin x = 1$

(۲۶) $(4\sin^2 x - 3)(3\sin^2 x - 4) = 0$

(۲۷) $2\cos^2 x = 5(1 - \sin x)$

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید :

(۲۸) $Arc\sin(2a\sqrt{1-a^2}) = 2 Arc\sin a$

(۱) راهنمائی : اگر $Arc\sin a$ را x بنامیم یعنی $\sin x = a$ باید ثابت کنیم که

$$Arc\sin(2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}) = 2x$$

و یا (چون دو کمان برابر دارای یک سینوس میباشند)

$$2\sin x \cdot \sqrt{1-\sin^2 x} = \sin 2x$$

(۲۹)

و چون $-\frac{\pi}{2} < x = Arc\,sin\,a < +\frac{\pi}{2}$ پس: $\sqrt{1-\sin^2 x} = +\cos x$ و باید ثابت کرد که

$\sin 2x = 2\sin x.\cos x$ و این ثابت است

(۳۰) $$2\,arc\,cot\,x = arc\,tg\,\frac{2x}{x^2-1}$$

(۳۱) $$2\,Arc\,cos\,x = Arc\,sin\,2x\sqrt{1-x^2}$$

(۳۲) $$Arc\,cot\,x = Arc\,cos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

(۳۳) $$arc\,sin\,x = arc\,sin\,(3x-4x^3)$$

$$x = Arc\,cos\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$$

(۳۴) حساب کنید عبارت $Arc\,tg\,\frac{1}{2} + Arc\,tg\,\frac{1}{3}$ را

راهنمائی - اگر $Arc\,tg\,\frac{1}{2}$ و $Arc\,tg\,\frac{1}{3}$ را بترتیب α و β بنامیم برای حساب کردن $\alpha + \beta$ قبلاً tg آنرا بدست میآوریم (زیرا $tg\,\alpha$ و $tg\,\beta$ داده شده است)

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha . tg\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

پس $$\alpha + \beta = Arc\,tg\,1 = \frac{\pi}{4}$$

درستی برابریهای زیر را بررسی نمائید:

(۳۵) $$Arc\,tg\,\frac{1}{3} - Arc\,tg(-1) = Arc\,tg\,2$$

$$\text{Arc tg}(\sqrt{2}+1)-\text{Arc tg}(-\sqrt{2}-1)=135^{\circ}$$ (۳۶)

$$\text{Arc tg}\sqrt{3}-\text{Arc tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\text{Arc tg}(-3\sqrt{3})$$ (۳۷)

$$\text{Arc}\frac{a+b}{a-b}-\text{Arc tg}\frac{b+a}{b-a}=\text{Arc tg}\frac{b^2-a^2}{2ab}$$ (۳۸)

$$\text{Arc tg}\left(\frac{-m^2}{n^2}\right)-\text{Arc tg}\frac{n^2}{m^2}=-\frac{\pi}{2}$$ (۳۹)

$$\text{Arc tg}\,3-\text{Arc tg}\frac{-1}{3}=\frac{\pi}{2}$$ (۴۰)

$$\text{Arc tg}\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}=2\,\text{Arc sin}\frac{b}{a}$$ (۴۱)

$$\text{Arcsin}\,x+\text{Arc cos}\,y=\text{Arc tg}\frac{xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}}$$ (۴۲)

$$\text{Arcsin}\,x+\text{Arc sin}\,y+\text{Arc sin}\,z=\text{Arc sin}\Big[x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}+y\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)}+z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xyz\Big]$$ (۴۳)

بفرض اینکه a و b دو گوشهٔ تند (یا دو کمان مثبت و کوچکتر از ۹۰°) باشند در هر یک از حالت‌های زیر سینوس و سینوس متمم و تانژانت $a+b$ و $a-b$ را حساب کنید

(۴۴) $\sin a=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\cos b=\frac{2}{3}$

(۴۵) $\sin a=\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\cos b=\frac{5}{13}$

(۴۶) $\text{tg}\,a=\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\cot b=\frac{5}{8}$

بفرض اینکه گوشه های a و b و $a+b$ تند باشند در هر یک از حالتهای زیر سینوس وسینوس متمم و تانژانت a را حساب کنید:

(۴۷) $\sin b = \frac{1}{4}$ $\qquad \cos(a+b) = \frac{3}{4}$

(۴۸) $\sin b = \frac{1}{4}$ $\qquad \cos(a-b) = \frac{3}{4}$

(۴۹) سینوس ۱۲۰° را از روی خط های مثلثاتی ۳۰° و ۹۰° حساب کنید

همچنین سینوس متمم ۱۳۵° را از روی خط های مثلثاتی ۴۵° و ۱۸۰°

عبارتهای زیر را بحسب خطهای مثلثاتی a بنویسید:

(۵۰) $\sin(a + \frac{\pi}{6})$ $\qquad$ (۵۲) $\cos(a + \frac{\pi}{4})$

(۵۱) $tg(a + \frac{\pi}{3})$

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید:

(۵۲) $\cos(x - \frac{\pi}{6}) - \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x$

(۵۳) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin x$

(۵۴) $\cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)\sin(x-y) = 1 - 2\sin^2 y$

(۵۵) $$\frac{tg(\frac{\pi}{4} + x)}{tg(\frac{\pi}{4} - x)} = \frac{(1 + tg\,x)^2}{(1 - tg\,x)^2}$$

(۵۶) $\cos(x+y)\cos y - \cos(x+z)\cos z$

$= \sin(x+z)\sin z - \sin(x+y)\sin y$

(۵۷) خطاهای مثلثاتی $67^\circ\ 30'$ را حساب کنید.

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید:

(۵۸) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = tg(45^\circ - x)$

(۵۹) $4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \cos^2 2x$

(۶۰) $\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$

(۶۱) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

(۶۲) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$

(۶۳) $\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 - tg x}{1 + tg x}$

(۶۴) $\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 4\cos 2x \cdot \cot 4x$

(۶۵) $\frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2\cot 2x$

(۶۶) $\sin 2x = \frac{2\cot x}{1+\cot^2 x}$

(۶۷) $\left(tg\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2}\right)\sin x = 2$

$$\frac{tg\,x + \sin x}{۲\,tg\,x} = \cos^{۲} x \qquad (۶۸)$$

$$\cot x - tg\,x = ۲\cot ۲x \qquad (۶۹)$$

$$\frac{\sin ۳x}{\sin x} - \frac{\cos ۳x}{\cos x} = ۲ \qquad (۷۰)$$

$$\frac{۱ - \cos ۲x}{\sin ۲x} = tg^{۲} x \qquad (۷۱)$$

$$۲ \sin x \cdot \cos^{۳} x + ۲ \cos x \cdot \sin^{۳} x = \sin ۲x \qquad (۷۲)$$

$$۴(\cos^{۶} x + \sin^{۶} x) = ۴ - \sin^{۲} ۲x \qquad (۷۳)$$

بخش دوّم

جدولهای لگاریتمی خطهای مثلثاتی و راه بکار بردن آنها

۱- در آغاز کتاب مثلثات سال چهارم (شمارهٔ ۱۲) گفتیم که چون محاسبهٔ خطهای مثلثاتی همهٔ کمانها (یا گوشه‌ها) آسان نیست بنابرین جدولهائی ترتیب داده‌اند که از روی برخی از آنها (مانند جدول آخر کتاب نامبرده) خط‌های مثلثاتی کمانها بدست میآید.

در برخی دیگر لگاریتم خط‌های مثلثاتی کمانها نوشته شده است.

چون معمولاً محاسبه‌های مثلثاتی لگاریتم خطهای مثلثاتی بکار میرود بایستی بخوبی راه بکار بردن جدولهای لگاریتم خط‌های مثلثاتی را فرا بگیریم.

۲- جدولهائی که معمولاً بکار برده میشود پنج پیکری است و در آن لگاریتم خط‌های مثلثاتی کمانها یا گوشه‌های از ۰° تا ۹۰° را دقیقه بدقیقه با پنج پیکرهٔ دهگان نوشته‌اند.

بوسیلهٔ این جدولها میتوان دو مسئلهٔ زیر را گشود:

الف- کمانی در دست است و میخواهیم لگاریتم یکی از خط‌های مثلثاتی آنرا بشناسیم

ب - لگاریتم یکی از خط های مثلثاتی کمان ناشناسی درست است و میخواهیم آن کمان را بشناسیم.

ما در ضمن گشودن این دو مسئله و از روی چند مثال عددی راه بکار بردن جدولهای لگاریتم پنج پیکری را نشان میدهیم:

۳- جدولی که در صفحه های ۲۴ و ۲۵ ازین کتاب دیده میشود رونویسی است از دو صفحه از یک جدول لگاریتم پنج پیکری (جدول دوپوئی(۱)) که برای نمونه آورده ایم. (تنها اختلافی که این نمونه با نسخه اصلی دارد فارسی بودن آنست و بنابرین از راست بچپ نوشته شده است).

چنانکه می بینیم: بالای این دو صفحه شماره زینه (۲۷°) نوشته شده و پائین آن زینه ۵۲°

در طرف راست صفحه نخست ستونیست که در آن شماره دقیقه ها از بالا بپائین از ۰ تا ۳۰ نوشته شده

و در طرف راست صفحه دوم « « « « « « از بالا بپائین از ۳۰ تا ۶۰ نوشته شده

---

(۱) Dupuis

و نیز در طرف چپ صفحهٔ دوّم ستونیست که در آن شمارهٔ دقیقه‌ها از پائین ببالا از ۰ تا ۳۰ نوشته شده

نخست ״ ״ ״ ״ ״ ״ ״ از ۳۰ تا ۶۰ ״ ״

دقیقه‌های ستون سمت چپ هر صفحه با دقیقه‌های ستون سمت راست همان صفحه

دو بدو در یک سطر نوشته شده بطوریکه مجموع هر یک از دقیقه‌های یکی از ستونهای سمت

راست با دقیقهٔ روبروی آن در ستون سمت چپ برابر ۶۰ هست . بنابرین مجموع

زینهٔ بالای صفحه با یکی از دقیقه‌های ستون سمت راست آن صفحه مثلاً ۲۵ متمم مجموع

زینهٔ پائین صفحه‌است با دقیقهٔ ۳۵ از ستون سمت چپ

۳۷° ۲۵′ + ۵۲° ۳۵′ = ۹۰°

هرگاه گوشه یا کمان از ۴۵° کوچکتر باشد شمارهٔ زینه‌های آن در بالای صفحه و شمارهٔ دقیقه‌های

آن در نخستین ستون سمت راست صفحه (از بالا بپائین) نوشته شده و هرگاه از ۴۵

بزرگتر باشد شمارهٔ زینه‌های آن در پائین صفحه و دقیقه‌های آن در نخستین ستون سمت چپ

صفحه (از پائین ببالا) نوشته شده است .

لگاریتم خط‌های مثلثاتی کمانهای کوچکتر از ۴۵° در ستونهائیست که بالای

آنها نوشته شده است «سینوس» «تانژانت» «تانژانت متمم» و یا

۳۷

′	سینوس	D	تانژانت	D	تانژانت متمم	سینوس متمم	D	′
۰	۱̄,۷۷۹۴۶		۱̄,۸۷۷۱۱		۰,۱۲۲۸۹	۱̄,۹۰۲۳۵		۶۰
		۱۷		۲۷			۱۰	
۱	۷۹۶۴		۷۷۳۸		۲۲۶۲	۰۲۲۵		۵۹
		۱۷		۲۶			۹	
۲	۷۹۸۰		۷۷۶۴		۲۲۳۶	۰۲۱۶		۵۸
		۱۷		۲۶			۱۰	
۴	۷۹۹۷		۷۷۹۰		۲۲۱۰	۲۰۶		۵۷
		۱۶		۲۷			۹	
۴	۸۰۱۳		۷۸۱۷		۲۱۸۳	۰۱۹۷		۵۶
		۱۷		۲۶			۱۰	
۵	۸۰۳۰		۷۸۴۳		۲۱۵۷	۰۱۸۷		۵۵
		۱۷		۲۶			۹	
۶	۸۰۴۷		۷۸۶۹		۲۱۳۱	۰۱۷۸		۵۴
		۱۶		۲۶			۱۰	
۷	۸۰۶۳		۷۸۹۵		۲۱۰۵	۰۱۶۸		۵۳
		۱۷		۲۷			۹	
۸	۸۰۸۰		۷۹۲۲		۲۰۷۸	۰۱۵۹		۵۲
		۱۷		۲۶			۱۰	
۹	۸۰۹۷		۷۹۴۸		۲۰۵۲	۰۱۴۹		۵۱
		۱۶		۲۶			۱۰	
۱۰	۸۱۱۳		۷۹۷۴		۲۰۲۶	۰۱۳۹		۵۰
		۱۷		۲۶			۹	
۱۱	۸۱۳۰		۸۰۰۰		۲۰۰۰	۰۱۳۰		۴۹
		۱۷		۲۷			۱۰	
۱۲	۸۱۴۷		۸۰۲۷		۱۹۷۳	۰۱۲۰		۴۸
		۱۶		۲۶			۹	
۱۳	۸۱۶۳		۸۰۵۳		۱۹۴۷	۰۱۱۱		۴۷
		۱۷		۲۶			۱۰	
۱۴	۸۱۸۰		۸۰۷۹		۱۹۲۱	۰۱۰۱		۴۶
		۱۷		۲۶			۱۰	
۱۵	۸۱۹۷		۸۱۰۵		۱۸۹۵	۰۰۹۱		۴۵
		۱۶		۲۶			۹	
۱۶	۸۲۱۳		۸۱۳۱		۱۸۶۹	۰۰۸۲		۴۴
		۱۷		۲۷			۱۰	
۱۷	۸۲۳۰		۸۱۵۸		۱۸۴۲	۰۰۷۲		۴۳
		۱۶		۲۶			۹	
۱۸	۸۲۴۶		۸۱۸۴		۱۸۱۶	۰۰۶۳		۴۲
		۱۷		۲۶			۱۰	
۱۹	۸۲۶۳		۸۲۱۰		۱۷۹۰	۰۰۵۳		۴۱
		۱۷		۲۶			۱۰	
۲۰	۸۲۸۰		۸۲۳۶		۱۷۶۴	۰۴۳		۴۰
		۱۶		۲۶			۹	
۲۱	۸۲۹۶		۸۲۶۲		۱۷۳۸	۰۳۴		۳۹
		۱۷		۲۷			۱۰	
۲۲	۸۳۱۳		۸۲۸۹		۱۷۱۱	۰۲۴		۳۸
		۱۶		۲۶			۱۰	
۲۳	۸۳۲۹		۸۳۱۵		۱۶۸۵	۰۰۱۴		۳۷
		۱۷		۲۶			۹	
۲۴	۸۳۴۶		۸۳۴۱		۱۶۵۹	۱̄,۹۰۰۰۵		۳۶
		۱۶		۲۶			۱۰	
۲۵	۸۳۶۲		۸۳۶۷		۱۶۳۳	۱̄,۸۹۹۹۵		۳۵
		۱۷		۲۶			۱۰	
۲۶	۸۳۷۹		۸۳۹۴		۱۶۰۷	۹۹۸۵		۳۴
		۱۶		۲۷			۹	
۲۷	۸۳۹۵		۸۴۲۰		۱۵۸۰	۹۹۷۶		۳۳
		۱۷		۲۶			۱۰	
۲۸	۸۴۱۲		۸۴۴۶		۱۵۵۴	۹۹۶۶		۳۲
		۱۶		۲۶			۱۰	
۲۹	۸۴۲۸		۸۴۷۲		۱۵۲۸	۹۹۵۶		۳۱
		۱۷		۲۶			۹	
۳۰	۱̄,۷۸۴۴۵		۱̄,۸۸۴۹۸		۰,۱۱۵۰۲	۱̄,۸۹۹۴۷		۳۰
′	سینوس متمم		تانژانت متمم		تانژانت	سینوس		′

۲۷	
۱″	۰,۴۵
۲	۰,۹۰
۳	۱,۳۵
۴	۱,۸۰
۵	۲,۲۵
۶	۲,۷۰
۷	۳,۱۵
۸	۳,۶۰
۹	۴,۰۵

۲۶	
۱″	۰,۴۳
۲	۰,۸۷
۳	۱,۳۰
۴	۱,۷۳
۵	۲,۱۷
۶	۲,۶۰
۷	۳,۰۳
۸	۳,۴۷
۹	۳,۹۰

۱۷	
۱″	۰,۲۸
۲	۰,۵۷
۳	۰,۸۵
۴	۱,۱۳
۵	۱,۴۲
۶	۱,۷۰
۷	۱,۹۸
۸	۲,۲۷
۹	۲,۵۵

۱۶	
۱″	۰,۲۷
۲	۰,۵۳
۳	۰,۸۰
۴	۱,۰۷
۵	۱,۳۳
۶	۱,۶۰
۷	۱,۸۷
۸	۲,۱۳
۹	۲,۴۰

۵۲°

۳۷

′	D	سینوس متمم	تانژانت متمم	D	تانژانت	D	سینوس	′
۳۰		۱̄،۸۹۹۴۷	۰،۱۱۵۰۲		۱̄،۸۸۴۹۸		۱̄،۷۸۴۴۵	۳۰
	۱۰			۲۶		۱۶		
۲۹		۹۹۳۷	۱۴۷۶		۸۵۲۴		۸۴۶۱	۳۱
	۱۰			۲۶		۱۷		
۲۸		۹۹۲۷	۱۴۵۰		۸۵۵۰		۸۴۷۸	۳۲
	۹			۲۷		۱۶		
۲۷		۹۹۱۸	۱۴۲۳		۸۵۷۷		۸۴۹۴	۳۳
	۱۰			۲۶		۱۶		
۲۶		۹۹۰۸	۱۳۹۷		۸۶۰۳		۸۵۱۰	۳۴
	۱۰			۲۶		۱۷		
۲۵		۹۸۹۸	۱۳۷۱		۸۶۲۹		۸۵۲۷	۳۵
	۱۰			۲۶		۱۶		
۲۴		۹۸۸۸	۱۳۴۵		۸۶۵۵		۸۵۴۳	۳۶
	۹			۲۶		۱۷		
۲۳		۹۸۷۹	۱۳۱۹		۸۶۸۱		۸۵۶۰	۳۷
	۱۰			۲۶		۱۶		
۲۲		۹۸۶۹	۱۲۹۳		۸۷۰۷		۸۵۷۶	۳۸
	۱۰			۲۶		۱۶		
۲۱		۹۸۵۹	۱۲۶۷		۸۷۳۳		۸۵۹۲	۳۹
	۱۰			۲۶		۱۷		
۲۰		۹۸۴۹	۱۲۴۱		۸۷۵۹		۸۶۰۹	۴۰
	۹			۲۷		۱۶		
۱۹		۹۸۴۰	۱۲۱۴		۸۷۸۶		۸۶۲۵	۴۱
	۱۰			۲۶		۱۷		
۱۸		۹۸۳۰	۱۱۸۸		۸۸۱۲		۸۶۴۲	۴۲
	۱۰			۲۶		۱۶		
۱۷		۹۸۲۰	۱۱۶۲		۸۸۳۸		۸۶۳۸	۴۳
	۱۰			۲۶		۱۶		
۱۶		۹۸۱۰	۱۱۳۶		۸۸۶۴		۸۶۷۴	۴۴
	۹			۲۶		۱۷		
۱۵		۹۸۰۱	۱۱۱۰		۸۸۹۰		۸۶۹۱	۴۵
	۱۰			۲۶		۱۶		
۱۴		۹۷۹۱	۱۰۸۴		۸۹۱۶		۸۷۰۷	۴۶
	۱۰			۲۶		۱۶		
۱۳		۹۷۸۱	۱۰۵۸		۸۹۴۲		۸۷۲۳	۴۷
	۱۰			۲۶		۱۶		
۱۲		۹۷۷۱	۱۰۳۲		۸۹۶۸		۸۷۳۹	۴۸
				۲۶		۱۷		
۱۱		۹۷۶۱	۱۰۰۶		۸۹۹۴		۸۷۵۶	۴۹
	۹			۲۶		۱۶		
۱۰		۹۷۵۲	۰۹۸۰		۹۰۲۰		۸۷۷۲	۵۰
	۱۰			۲۶		۱۶		
۹		۹۷۴۲	۰۹۵۳		۹۰۴۶		۸۷۸۸	۵۱
	۱۰			۲۷		۱۷		
۸		۹۷۳۲	۰۹۲۷		۹۰۷۳		۸۸۰۵	۵۲
	۱۰			۲۶		۱۶		
۷		۹۷۲۲	۰۹۰۱		۹۰۹۹		۸۸۲۱	۵۳
	۱۰			۲۶		۱۶		
۶		۹۷۱۲	۰۸۷۵		۹۱۲۵		۸۸۳۷	۵۴
	۱۰			۲۶		۱۶		
۵		۹۷۰۲	۰۸۴۹		۹۱۵۱		۸۸۵۳	۵۵
	۹			۲۶		۱۶		
۴		۹۶۹۳	۰۸۲۳		۹۱۷۷		۸۸۶۹	۵۶
	۱۰			۲۶		۱۷		
۳		۹۶۸۳	۰۷۹۷		۹۲۰۳		۸۸۸۶	۵۷
	۱۰			۲۶		۱۶		
۲		۹۶۷۳	۰۷۷۱		۹۲۲۹		۸۹۰۲	۵۸
	۱۰			۲۶		۱۶		
۱		۹۶۶۳	۰۷۴۵		۹۲۵۵		۸۹۱۸	۵۹
	۱۰			۲۶		۱۶		
۰		۱̄،۸۹۶۵۳	۰،۱۰۷۱۹		۱̄،۸۹۲۸۱		۱̄،۷۸۹۳۴	۶۰
′		سینوس	تانژانت		تانژانت متمم		سینوس متمم	′

۵۲°

۲۷	
۱	۰،۲۵
۲	۰،۹۰
۳	۱،۳۵
۴	۱،۸۰
۵	۲،۲۵
۶	۲،۷۰
۷	۳،۱۵
۸	۳،۶۰
۹	۴،۰۵

۲۶	
۱″	۰،۴۳
۲	۰،۸۷
۳	۱،۳۰
۴	۱،۷۳
۵	۲،۱۷
۶	۲،۶۰
۷	۳،۰۳
۸	۳،۴۷
۹	۳،۹۰

۱۷	
۱	۰،۲۸
۲	۰،۵۷
۳	۰،۸۵
۴	۱،۱۳
۵	۱،۴۲
۶	۱،۷۰
۷	۱،۹۸
۸	۲،۲۷
۹	۲،۵۵

۱۶	
۱″	۰،۲۷
۲	۰،۵۳
۳	۰،۸۰
۴	۱،۰۷
۵	۱،۳۳
۶	۱،۶۰
۷	۱،۸۷
۸	۲،۱۳
۹	۲،۴۰

«سینوس متمم» مثلاً لگاریتم ۲۵َ ۳۷ْ $\cos$ در ستونی نوشته شده است که بالای آن نوشته اند «سینوس متمم» و درین ستون عددیست روبرو به عدد ۲۵َ (از نخستین ستون راست):

$$\log \cos ۳۷^\circ\ ۲۵' = \bar{۱},۸۹۹۹۵$$

همچنین لگاریتم خط های مثلثاتی کمانهای بزرگتر از ۴۵ْ در ستونهائیست که زیر آنها «سینوس» «تانژانت» «تانژانت متمم» و یا «سینوس متمم» نوشته اند مثلاً لگاریتم ۳۵َ ۵۲ْ $\sin$ در ستونی نوشته شده است که زیر آن نوشته اند «سینوس» و دراین ستون عددیست روبرو بعدد ۳۵َ (از نخستین ستون چپ):

$$\log \sin ۵۲^\circ\ ۳۵' = \bar{۱},۸۹۹۹۵$$

(روشن است که باید ۲۵َ ۳۷ْ $\cos$ برابر ۳۵َ ۵۲ْ $\sin$ باشد زیرا ۳۵َ ۵۲ْ متمم ۲۵َ ۳۷ْ است).

اگر لگاریتم ۳۴َ ۵۲ْ $\sin$ را بخواهیم می بینیم روبرو به عدد ۳۴َ فقط چهار پیکر نوشته شده: ۹۹۷۶ واین بدین جهت است که لگاریتم سینوس ۳۴َ ۵۲ْ با لگاریتم سینوس گوشه های مجاور در دو پیکری که نوشته نشده برابر است

در این جا می بینیم لگاریتم سینوس ۳۵َ ۵۲ْ برابر با $\bar{1}$٫۸۹۹۹۵ و لگاریتم سینوس ۳۰َ ۵۲ْ عدد $\bar{1}$٫۸۹۹۴۷ است پس نتیجه میگیریم :

log sin ۵۲ ۳۴َ = $\bar{1}$٫۸۹۹۷۶

در سمت چپ ستون «سینوس» ستون باریکی است D که در آن تفاضلهای میان دو لگاریتم سینوس پیاپی نوشته شده است .

و نیز در سمت چپ ستون «سینوس متمم» ستون باریکی است D که در آن تفاضل های میان دو لگاریتم سینوس متمم پیاپی نوشته شده ولی این ستون برای کمانهای کوچکتر از ۱۸ْ وجود ندارد زیرا برای این کمانها تفاضل دو لگاریتم سینوس متمم پیاپی از ۵ کمتر است و خود دیده میشود .

همچنین میان دو ستون «تانژانت» و «تانژانت متمم» ستون باریکی است D که در آن تفاضل دو لگاریتم تانژانت پیاپی و یا دو لگاریتم تانژانت متمم پیاپی نوشته شده .

تفاضل میان دو کمان تقریباً با تفاضل میان لگاریتمها متناسب است از این رو قبلاً جزءهای متناسب همهٔ تفاضلها را برای ۱ ، ۲ ، ۳ ... ۹۰ ثانیه حساب کرده در جا

نوشته اند (ولی چون برای کمانهای کوچکتر از ۶ زینه شماره تفاضلها زیاد است جزءهای متناسب برای این کمانها نوشته نشده و درموقع لزوم باید خود حساب کنیم).

۴- الف - مسئله نخست - کمانی در دست است و میخواهیم لگاریتم یکی از خط های مثلثاتی آنرا بیابیم.

حالت نخست - کمان فقط شامل زینه و دقیقه است - درینصورت لگاریتم ناشناس عیناً درجدول یافت میشود چنانکه مثلاً درهمین نمونه میخوانیم

log sin ۵۲° ۱۴′ = ۱̄٫۸۹۷۸۱

log cos ۳۷° ۳۴′ = ۱̄٫۸۹۹۱۸

log tg ۵۲° ۲۴′ = ۰٫۱۱۳۴۵

log cot ۳۷° ۱۷′ = ۰٫۱۱۸۴۲

حالت دوم - کمان شامل ثانیه (ویا برخه ای از دقیقه) میباشد.

مثال ۱- میخواهیم لگاریتم سینوس ″۳۴ ′۴۷ °۳۷ راحساب کنیم.

لگاریتم سینوس ′۴۷ °۳۷ درجدول یافت میشود:

log sin ۳۷° ۴۷′ = ۱̄٫۷۸۷۲۳

وتفاضل میان این لگاریتم و لگاریتم سینوس ′۴۸ °۳۷ برابر ۱۶ است یعنی ۱۶ صد هزارم حال چون تفاضل کمانها تقریباً با تفاضل لگاریتمها متناسب است گوئیم هرگاه بر کمان ″۳۴ افزوده شود بر لگاریتم سینوس $\frac{۳۴}{۶۰}$ × ۱۶ یعنی ۹ افزوده میشود. جدول جزءهای متناسب که در حاشیه زیر عدد ۱۶ نوشته شده همین نتیجه را میدهد بدون اینکه لازم باشد $\frac{۳۴}{۱۶}$ را در ۱۶ ضرب کنیم:

در آنجا روبروبه ثانیهٔ ۳ عدد ۰٫۸۰ نوشته شده یعنی هرگاه بر کمان ۳ ثانیه افزوده شود بر لگاریتم سینوس آن ۰٫۸۰ (از یک صد هزارم) افزوده میشود بنابرین هرگاه ″۳۰ افزوده شود بر لگاریتم ۸ صد هزارم افزوده میشود از طرف دیگر روبروبه ″۴ عدد ۱٫۰۷ را نوشته شده پس در ازاء ۳۴ ثانیه ۸ + ۱٫۰۷ = ۹٫۰۷ یا تقریباً ۹ بر لگاریتم افزوده خواهد شد.

صورت محاسبه را بطور خلاصه چنین نویسند:

log sin ۳۷° ۴۷′ = ۱̄٫۷۸۷۲۳

D = ۱۶

۳۴ ———— ۹

log sin ۳۷° ۴۷′ ۳۴″ = ۱̄٫۷۸۷۳۲

بهمین ترتیب لگاریتم تانژانت یک کمان بدست میآید مثلاً

log tg ۵۲° ۳۸′ ۲۶″ = ۰٫۱۱۷۲۳

مثال ۲- میخواهیم لگاریتم سینوس متمم ۳۲° ۴۷′ ۳۴″ را حساب کنیم.

میدانیم هرگاه کمان مثبت و از ۹۰° کوچکتر باشد سوی تغییرات آن وارونه سوی تغییرات سینوس متمم آن است پس برای اینکه بر لگاریتمی که در جدول نوشته شده چیزی بیفزائیم (چون افزودن همیشه آسانتر از کم کردنست) نخست لگاریتم سینوس متمم ۳۲° ۴۸′ را در جدول می یابیم:

log cos ۳۲° ۴۸′ = ۱̄٫۸۹۷۷۱

و چون تفاضل میان این لگاریتم و لگاریتم سینوس متمم ۳۲° ۴۷′ برابر ۱۰ است (یعنی ده صد هزارم) پس گوئیم هرگاه از کمان ۲۶″ کم شود بر لگاریتم سینوس متمم ۱۰ × ۲۶/۶۰ = ۴٫۳۳ و یا تقریباً ۴ صد هزارم افزوده خواهد شد.

log cos ۳۲° ۴۸′ = ۱̄٫۸۹۷۷۱

−۲۶″ +۴ D = ۱۰

log cos ۲۲° ۴۷′ ۳۴″ = ۱̄٫۸۹۷۷۵

بهمین ترتیب لگاریتم تانژانت متمم هر کمان بدست میآید: مثلاً برای بدست آوردن لگاریتم تانژانت متمم ″۲۶ ′۳۸ °۵۲ صورت عمل چنین است:

$$\log \cot 52^\circ\ 39' = \bar{1},88262$$

D=26

$$\underline{-34''} \qquad \underline{+15}$$

$$\log \cot 52^\circ\ 38'\ 26'' = \bar{1},88277$$

۵ ـ ب ـ مسئلهٔ دوم ـ لگاریتم یکی از خط های مثلثاتی کمان ناشناسی در دست است میخواهیم آن کمان را بشناسیم.

حالت نخست ـ لگاریتم عیناً در جدول هست. قبلاً باید در نظر داشت که

$$\log \sin 45^\circ = \log \cos 45^\circ = \bar{1},84949$$

$$\log tg\ 45^\circ = \log \cot 45^\circ = 0$$

بنابرین اگر مثلاً بخواهیم کمانی را بیابیم که لگاریتم سینوس آن در دست است اگر این لگاریتم از ۱̄,۸۴۹۴۹ کوچکتر باشد کمان از °۴۵ کوچکتر خواهد بود و چنانکه پیش گفتیم لگاریتم سینوس آن در ستونیست که بالای آن «سینوس» نوشته شده شمارهٔ درجه های کمان بالای صفحه است و شمارهٔ دقیقه هایش در نخستین ستون سمت راست را

و رو برو به لگاریتم داده شده .

واگر لگاریتمی که داریم از ۹۴۹ ۸۴ ر۱̄ بزرگتر باشد کمان از ۴۵° بزرگتر است . لگاریتم سینوس آن در ستونی است که زیر آن « سینوس » نوشته شده ـ شمارهٔ زینه های کمان در پائین صفحه است و شمارهٔ دقیقه هایش در نخستین ستون دست چپ رو برو به لگاریتم داده شده . مثال

$$\bar{1},78756 = \log \sin 37^{\circ}\ 49'$$

$$\bar{1},90206 = \log \sin 52^{\circ}\ 57'$$

همچنین اگر بخواهیم کمانیرا بیابیم که لگاریتم سینوس متمم آن در دست باشد . اگر این لگاریتم از ۹۴۹ ۸۴ ر۱̄ بزرگتر باشد کمان از ۴۵° کوچکتر است وبعکس .

اگر لگاریتم تانژانت کمانی در دست باشد خود کمان از ۴۵° کوچکتر است یا بزرگتر بنا بر آنکه این لگاریتم کوچکتر از صفر و یا بزرگتر از آن باشد

واگر لگاریتم تانژانت متمم در دست باشد خود کمان کوچکتر از ۴۵° یا بزرگتر از آن است بنا بر آنکه این لگاریتم بزرگتر از صفر و یا کوچکتر از صفر باشد ـ مثال :

$$\bar{1},90111 = \log \cos 37^{\circ}\ 13'$$

$\bar{۱}$،۷۸۶۲۵ = log cos ۵۲° ۱۹'

$\bar{۱}$،۸۹۱۵۱ = log tg ۳۲° ۵۵'

۰،۱۰۹۸۰ = log tg ۵۲° ۱۰'

$\bar{۱}$،۸۷۷۱۱ = log cot ۳۲°

۰،۱۲۰۰۰ = log cot ۵۲° ۴۹'

حالت دوّم ـ لگاریتم داده شده در جدول نیست .

مثال ۱ ـ لگاریتم سینوس کمانی $\bar{۱}$،۷۸۳۰۴ است میخواهیم آن کمانرا بشناسیم. این عدد در جدول در ستون «سینوس» نیست ولی نزدیکترین عددها به $\bar{۱}$،۷۸۳۰۴ که در این ستون بوده و کوچکتر از $\bar{۱}$،۷۸۳۰۴ باشد عدد $\bar{۱}$،۷۸۲۹۶ است که لگاریتم سینوس ۳۷° ۲۱' میباشد. حال اگر عدد $\bar{۱}$،۷۸۲۹۴ را از $\bar{۱}$،۷۸۳۰۴ و از لگاریتم سینوس ۳۷° ۲۲' کم کنیم بترتیب دو عدد ۱۰ و ۱۷ بدست میآید و گوئیم چون هرگاه بر کمان ۱' یا ۶۰" ثانیه افزوده شود بر لگاریتم سینوس آن ۱۷ صد هزارم افزوده میگردد پس هرگاه بر لگاریتم سینوس ۱۰ افزوده شود بر کمان $\frac{۱۰}{۱۷}\times ۶۰$ ثانیه و یا تقریباً ۳۵ ثانیه افزوده خواهد شد ـ در اینجا هم میتوان همین نتیجه را

از روی جدول پاره های متناسب که زیر ۱۷ نوشته شده بدست آورد: چون ۱۰ از ۲٫۵۵ که روبروی ۹″ نوشته شده بزرگتر است ده یک آن یعنی ۱٫۰ را می بینیم آیا نظیر افزایش چند ثانیه است ولی «۱» هم عیناً در جدول پاره های متناسب یافت نمیشود و نزدیکترین عدد به «۱» عدد ۰٫۸۵ است که روبروی ۳″ نوشته شده یعنی هرگاه ۰٫۸۵ بر لگاریتم افزوده شود بر کمان ۳۰″ افزوده شود میماند ۰٫۱۵ را که باز عیناً یافت نمیشود و نزدیکترین عددها به ۰٫۱۵ عدد ۰٫۱۴۲ است که روبروی ۰٫۵″ نوشته شده میماند ۰٫۰۰۸ که چون از ۰٫۲۸ خیلی کوچکتر است از آن چشم میپوشیم پس چنین برمیآید: هرگاه بر لگاریتم ۱۰ افزوده شود بر کمان تقریباً ۳٫۵″ افزوده میشود:

$$\bar{1},78302 = \log\sin 32^\circ\ 21'\ \ ''$$

صورت عمل چنین نوشته میشود:

$$\log\sin x = \bar{1},78302 \qquad 32^\circ\ 21'$$

$$\underline{\bar{1},78292} \qquad\qquad \underline{3,5''}$$

$$D = 17 \qquad 10$$

$$x = 32^\circ\ 21'\ 3,5''$$

اگر لگاریتم تانژانت کمانی داده شود راه بدست آوردن کمان مانند بالا است. مثلاً می بینیم که:

۰٫۱۰۹۳۶ = log tg ۵۲° ۸′ ۲۰″

مثال ۲ - لگاریتم سینوس متمم کمانی ۱̄٫۸۹۹۸۰ است میخواهیم آن کمان را بشناسیم این عدد هم در جدول در ستون سینوس متمم عیناً یافت نمیشود ولی چون هرگاه کمان بزرگ شود از سینوس متمم آن کاسته میشود بنابرین در ستون سینوس متمم ها نزدیکترین عددی را به ۱̄٫۸۹۹۸۰ مییابیم که از آن بزرگتر باشد و آن ۱̄٫۸۹۹۸۵ است که لگاریتم سینوس متمم ۳۷° ۲۶′ میباشد زیادی ۱̄٫۸۹۹۸۵ از ۱̄٫۸۹۹۸۰ و از لگاریتم سینوس متمم ۳۷° ۲۷′ بترتیب ۵ و ۹ است بنابرین گوئیم چون هرگاه بر کمان ۶۰″ افزوده شود از لگاریتم سینوس متمم آن ۹ کم میشود پس اگر از لگاریتم سینوس ۵ کم شود بر کمان ۵/۹ × ۶۰ یا تقریباً ۳۳″ افزوده خواهد شد بنابرین ۱̄٫۸۹۹۸۰ = log cos ۳۷° ۲۶′ ۳۳″ صورت عمل چنین نوشته میشود:

log cos x = ۱̄٫۸۹۹۸۰
۱̄٫۸۹۹۸۵ ‏ ‏ ‏ ۳۷° ۲۶′ ‏ ‏ ‏ D = ۹
‎-۵ ‏ ‏ ‏ + ۳۳″
x = ۳۷° ۲۶′ ۳۳″

بهمین ترتیب با داشتن لگاریتم تانژنت متمم یک کمان آن کمانرا حساب می کنیم

ورزش

۱- پیدا کنید لگاریتم و کلگاریتم خطهای مثلثاتی زیر را:

$\operatorname{tg} 37^\circ\ 22'\ 12''$ — $\cos 13^\circ\ 34'\ 16''$

$\operatorname{tg} 29^\circ\ 37'\ 8''$ — $\cot 13^\circ\ 47'\ 5''$

$\sin 69^\circ\ 15'\ 44''$ — $\cos 48^\circ\ 32'\ 24''$

$\operatorname{tg} 74^\circ\ 38'\ 22''$ — $\cot 63^\circ\ 51'\ 42''$

۲- کمان x را پیدا کنید بفرض اینکه

$\log \cos x = \bar{1},34062$ — $\log \sin x = \bar{1},93785$

$\log \cos x = \bar{2},87956$ — $\log \sin x = \bar{1},25076$

$\log \operatorname{tg} x = 0,73950$ — $\log \cot x = 0,29381$

$\log \operatorname{tg} x = \bar{1},54807$ — $\log \cot x = \bar{2}95997$

۳- کلگاریتم x را حساب کنید:

$$x = 1,5908 \times \operatorname{tg} 38^\circ\ 38'\ 40''$$

$$x = ۰٫۰۰۵۳۲۱\overline{۶} \times \cot ۹^{\circ}\ ۱۱'\ ۲۵''$$

$$x = \frac{۷۹٫۵۰۶}{\cos ۷۳^{\circ}\ ۲۹'\ ۲۷''}$$

$$x = \sqrt[۳]{۰٫۸۳۰۵۸ \times \sin^{۲} ۲۹^{\circ}\ ۳۱'\ ۹''}$$

$$\sin x = \frac{۱۵٫۰۷۵}{۲۱٫۱۸۹}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{۵۳٫۲۹۵}{۲۴٫۳۶۷}$$

$$\cos x = \frac{۱۳۱٫۱۷}{۱۶۴٫۱۹}$$

$$\cot x = \frac{۲٫۰۵۸۳}{۱٫۴۳۵۹}$$

بخش سوّم

الف - تبدیل مجموع دو خط مثلثاتی بحاصل ضرب و بعکس

۶ - تبدیل حاصل ضرب بمجموع - اگر دو طرف دو اتحاد (۱۹) و (۲۰) را بهم بیفزائیم یا از هم کم کنیم بترتیب دو اتحاد زیر را خواهیم داشت :

$$(A) \quad \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a.\cos b$$

$$(B) \quad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a.\sin b$$

همچنین اگر دو طرف دو اتحاد (۱۷) و (۱۸) را یکبار بهم بیفزائیم و یکبار از هم کم کنیم دو اتحاد زیر بدست میآید :

$$(C) \quad \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a.\cos b$$

$$(D) \quad \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2\sin a.\sin b$$

از روی این چهار اتحاد میتوان حاصل ضرب دو خط مثلثاتی (سینوس و سینوس متمم) را به مجموع یا تفاضل دو سینوس یا دو سینوس متمم مبدل نمود (کافی است این اتحادها را از راست بچپ بخوانیم)

مثلاً اگر بخواهیم حاصل ضرب $2\cos 15^\circ \cos 45^\circ$ و یا $\sqrt{2}\cos 15^\circ$ را
حساب کنیم بنا بر اتحاد (C) میتوان نوشت:

$$2\cos 15^\circ \cos 45^\circ = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

از آنجا

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

ورزش

عبارت های زیر را به مجموع یا تفاضل مبدل نمائید:

(۱) $2\sin 30^\circ \cos 60^\circ$ (۲) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4}$

(۳) $\cos 60^\circ \cos 20^\circ$ (۴) $\sin 40^\circ \cos 20^\circ$

(۵) $\sin 40^\circ \sin 20^\circ$ (۶) $2\sin nx.\cos(n-1)x$

(۷) $\cos 5x.\cos 2x$ (۸) $\cos 4x \sin x$

(۹) اتحاد زیر را ثابت کنید

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

۱۰- $\sin 15^\circ$ و $\sin 75^\circ$ و $\cos 75^\circ$ را از روی تبدیل به مجموع حسا

کنید (همچنانکه در مثال بالا $\cos 15$ را حساب کردیم)

۷- تبدیل مجموع به حاصل ضرب - حال اگر $a+b$ و $a-b$

را بترتیب p و q بنامیم

$$a+b=p$$

$$a-b=q$$

خواهیم داشت:

$$a=\frac{p+q}{2}$$

$$b=\frac{p-q}{2}$$

بنابرین اتحادهای (A) و (B) و (C) و (D) بترتیب چنین نوشته میشود:

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} \quad (26)$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \quad (27)$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} \quad (28)$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2} \quad (29)$$

از روی این اتحادها میتوان مجموع جبری دو خط مثلثاتی (دو سینوس یا دو سینوس

تمم) را به حاصل ضرب مبدل نمود . مثلاً

$$\cos ۷۵^\circ - \cos ۱۵^\circ = -۲ \sin \frac{۷۵^\circ+۱۵^\circ}{۲} \sin \frac{۷۵-۱۵}{۲}$$

$$= -۲ \sin ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ$$

$$= -۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲}$$

$$= -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تبصره - برای مبدل کردن مجموع جبری یک سینوس و یک سینوس متمم مثلاً

برای مبدل کردن $\sin x + \cos y$ بحاصل ضرب میتوان $\sin x$ را

$\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ نوشت و یا $\cos y$ را $\sin(\frac{\pi}{۲} - y)$ پس

$$\sin x + \cos y = \sin x + \sin(\frac{\pi}{۲} - y) = ۲ \sin \frac{x + \frac{\pi}{۲} - y}{۲} \cos \frac{x - \frac{\pi}{۲} + y}{۲}$$

$$= \cos(\frac{\pi}{۲} - x) + \cos y = ۲\cos \frac{\frac{\pi}{۲} - x + y}{۲} \cos \frac{\frac{\pi}{۲} - x - y}{۲}$$

همچنین است راه تبدیل کردن $\sin x - \sin y$ و $\cos x \pm \sin y$

بحاصل ضرب

۸ - تبدیل مجموع جبری دو تانژانت به حاصل ضرب - برای اینکه

مجموع جبری دو تانژانت را به حاصل ضرب مبدل نمائیم بترتیب چنین مینویسیم :

$$tg\,a \pm tg\,b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

یا

$$tg\,a \pm tg\,b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b} \qquad (۴۰)$$

میتوان گفت که طرف دوم حاصل ضرب سه سازهٔ $\sin(a \pm b)$ و $\frac{1}{\cos a}$ و $\frac{1}{\cos b}$ است

مجموع جبری دو تانژانت متمم مانند مجموع جبری دو تانژانت تبدیل میشود

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \mp a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

تبصره - همچنانکه برای تبدیل کردن مجموع جبری یک سینوس و یک سینوس متمم گفته شد در مورد مجموع جبری یک تانژانت و یک تانژانت متمم نیز میتوان عمل نمود مثلاً

$$tg\,a + \cot b = tg\,a + tg\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \frac{\sin\left(a + \frac{\pi}{2} - b\right)}{\cos a \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} + (a - b)\right]}{\cos a \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}$$

ولی در این جا آسانتر چنین است که $tg\,a + \cot b$ را نیز مانند $tg\,a + tg\,b$ تبدیل نمائیم:

$$tg\,a + \cot b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin a \sin b + \cos a \cos b}{\cos a \cdot \sin b} = \frac{\cos(a - b)}{\cos a \sin b}$$

ورزش

عبارتهای زیر را بصورت حاصل ضرب دو خط مثلثاتی بنویسید :

(۱) $\sin 15^\circ + \sin 35^\circ$

(۲) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

(۳) $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ$

(۴) $\sin 70^\circ - \sin 10^\circ$

(۵) $\sin 3x - \sin x$

(۶) $\sin 45^\circ + \cos 15^\circ$

(۷) $\cos 14^\circ - \cos 46^\circ$

(۸) $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$

(۹) $\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}$

(۱۰) $\cos 4a - \cos(-a)$

(۱۱) $\cos(n+1)x - \cos(n-1)x$

(۱۲) $\sin (n+1)\frac{\pi}{4} - \cos(n-3)\frac{\pi}{4}$

درستی برابریهای زیر را بررسی نمائید :

(۱۳) $\sin 80^\circ = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ$

(۱۴) $\frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 50^\circ} = \sqrt{3}$

(۱۵) $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = \cos 20^\circ$

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید :

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{\sin 2x - \sin 2y} = \frac{tg(x+y)}{tg(x-y)}$$ (۱۶)

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{tg\frac{x+y}{2}}{tg\frac{x-y}{2}}$$ (۱۷)

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = - tg\frac{x+y}{2} \cdot tg\frac{x-y}{2}$$ (۱۸)

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = tg\frac{x+y}{2}$$ (۱۹)

$$\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 3x + \sin 5x} = tg\, x$$ (۲۰)

$$\frac{\sin 7x + \sin x}{\cos 7x + \cos x} = tg\, 4x$$ (۲۱)

$$\sin(x+2y) - \sin(x-2y) = 4\cos x \cos y \sin y$$ (۲۲)

$$\cos(2x-y) - \cos(2x+y) = 4\sin x \sin y \cos x$$ (۲۳)

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin x$$ (۲۴)

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}-a\right) = \cos a$$ (۲۵)

$$\frac{\sin 7x + \sin 9x}{\cos 7x - \cos 9x} = \cot x$$ (۲۶)

$$\frac{\sin(n-2)x + \sin nx}{\cos(n-2)x - \cos nx} = \cot x$$ (۲۷)

$$\sin(90^\circ + a) - \sin(30^\circ + a) - \sin(30^\circ - a) = 0$$ (۲۸)

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$$ (۲۹)

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 4\cos x \cos 2x \cos 4x$$ (۳۰

$$\sin x + \sin y + \sin(x+y) = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$ (۳۱

$$\sin x + \sin y - \sin(x+y) = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$ (۳۲

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$ (۳۳

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}$$ (۳۴

۳۵) ثابت کنید که هرگاه $a + b + c = 180°$ باشد داریم:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c - 1 = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}$$

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\cos 3x + \cos x} = -\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x$$ (۳۶

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 5x + \sin 3x} = \cot 4x \operatorname{tg} x$$ (۳۷

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$ (۳۸

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin x$$ (۳۹

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x \qquad (40)$$

$$\cot 4x+\operatorname{tg} x=\frac{2\cos 3x}{\sin 5x+\sin 3x} \qquad (41)$$

$$\cot x+\cot 2x=\frac{2\sin 3x}{\cos x-\cos 3x} \qquad (42)$$

$$\operatorname{tg} 3x\cdot\operatorname{tg} 4x+1=\frac{2\cos x}{\cos x+\cos 7x} \qquad (43)$$

$$1+\operatorname{tg} 2x\cdot\cot 3x=\frac{2\sin 5x}{\sin 5x+\sin x} \qquad (44)$$

$$\cos 4x\cos x-\sin 4x\sin x=\cos 5x \qquad (45)$$

$$\cos 4x\cos x+\sin 4x\sin x=\cos 3x \qquad (46)$$

$$\frac{\sin 2x+\sin x}{\cos 2x+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{3x}{2} \qquad (47)$$

$$\frac{\sin x+2\sin 3x+\sin 5x}{\sin 3x+2\sin 5x+\sin 7x}=\frac{\sin 3x}{\sin 5x} \qquad (48)$$

$$\frac{\cos x+\cos 11x}{\cos x-\cos 11x}=\cot 6x\cot 5x \qquad (49)$$

$$\frac{\sin x+\cos 2x-1}{\cos x-\sin 2x}=\operatorname{tg} x \qquad (50)$$

$$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad (51)$$

$$\frac{\cos 2x+\cos 7x}{\cos 3x+\cos 6x}+\frac{\cos 6x-\cos x}{\cos 5x-\cos 2x}=\frac{2\sin 4x}{\sin 3x} \qquad (52)$$

$$\frac{\sin 10x+\sin 6x}{\sin 12x+\sin 4x}-\frac{\sin 5x-\sin x}{\sin 7x+\sin x}=\frac{2\sin 2x}{\sin 8x} \qquad (53)$$

$$\frac{\cos 12x + \cos 6x}{\sin 14x - \sin 4x} + \frac{\sin 7x - \sin x}{\cos 9x + \cos x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 10x} \quad (54)$$

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = tg\, 2x \quad (55)$$

$$\frac{\sin(x+3y) + \sin(3x+y)}{\sin 2x + \sin 2y} = 2\cos(x+y) \quad (56)$$

$$\frac{\cos(x+3y) - \cos(3x+y)}{\cos 2y - \cos 2x} = 2\cos(x+y) \quad (57)$$

$$\cos x\, tg(y-x) + \sin x = \frac{\sin y}{\cos(y-x)} \quad (58)$$

$$\sin^2 4x \cdot \cos^4 3x \cos 4x - \sin^2 4x \cos^3 3x \sin 3x \quad (59)$$

$$= \sin^2 4x \cos^3 3x \cos 7x$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) \quad (60)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) \quad (61)$$

$$\sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{64}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}\right) \quad (62)$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \quad (63)$$

پاسخ های همچندیهای زیر را که میان ۰° و ۳۶۰° میباشد بدست آورید:

$$\sin 2x = \sin x \quad (64)$$

(پاسخ‌ها: [illegible] ۱۸۰ و ۳۰۰ و ۳۶۰)

$$\sin 2x = \cos x \quad (65)$$

$\cos 2x = \cos x$ (٦٦)

$\cos 2x = \sin x$ (٦٧)

$\sin 3x + \sin x = \cos x$ (٦٨)

$\sin 5x - \sin x + \cos 4x + \cos 2x = 0$ (٦٩)

$\sin 5x + 2\cos x + \sin 3x = 0$ (٧٠)

$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$ (٧١)

$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 0$ (٧٢)

$\operatorname{tg} x - \cot x = \cot 2x$ (٧٣)

$\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$ (٧٤)

$\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$ (٧٥)

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x = 1$ (٧٦)

$\sin \frac{x}{2} - \cos x = 1$ (٧٧)

ب - محاسبه پذیر نمودن مجموع چند خط مثلثاتی با لگاریتم

۹۰ - یکی از فایده های عمل تبدیل کردن حاصل جمع (یا تفاضل) های چند خط مثلثاتی بحاصل ضرب آسان نمودن محاسبه های عددی عبارتهای مثلثاتی است

مثلاً اگر بخواهیم عبارت

$$S = \cos 14° - \cos 27°$$

را بکمک جدول لگاریتم حساب کنیم اگر این عبارت بحاصل ضرب تبدیل نشده باشد باید نخست لگاریتم $\cos 14°$ و لگاریتم $\cos 27°$ را از روی جدول پیدا کنیم

$$\log \cos 14° = \bar{1},98872$$

$$\log \cos 27° = \bar{1},94988$$

سپس خود $\cos 14°$ و $\cos 27°$ را از روی جدول پیدا کرده از هم کم میکنیم تا S حساب شود:

$$S = \cos 14° - \cos 27° = 0,97436 - 0,89100 = 0,08336$$

ولی اگر نخست S را بحاصل ضرب تبدیل نمائیم:

$$S = -2 \sin \frac{14+27}{2} \sin \frac{14-17}{2} = 2 \sin 20° \sin 7°$$

خواهیم داشت:

$$\log S = \log 2 + \log \sin 20^\circ + \log \sin 7^\circ$$

$$= 0{,}30103 + \bar{1}{,}53405 + \bar{1}{,}08589$$

$$= \bar{2}{,}92097$$

و باین ترتیب کافی است ببینیم $\bar{2}{,}92097$ لگاریتم چه عددیست

$$\bar{2}{,}92097 = \log 0{,}08336$$

$$S = 0{,}08336$$

۱۰- هرگاه یک عبارت جبری S را طوری تبدیل نموده باشیم که عبارت تبدیل شده تنها دو عمل ضرب و تقسیم را دربرداشته باشد گوئیم S را محاسبه پذیر بالگاریتم نموده ایم - مثلا برای اینکه $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$ محاسبه پذیر بالگاریتم شود آن را بصورت $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$ درمیآوریم (دستور ۴۰):

$$\log(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) = \log \sin(a+b) + \operatorname{colog} \cos a + \operatorname{colog} \cos b$$

مثال ۱- میخواهیم $S = \sin a + 2\sin 3a + \sin 5a$ را بحاصل ضرب تبدیل کنیم

نخست مجموع $\sin a + \sin 5a$ را بحاصل ضرب تبدیل میکنیم. بترتیب خواهیم داشت:

$$S = (\sin a + \sin 5a) + 2 \sin 3a$$

$$= 2 \sin 3a \cos 2a + 2 \sin 3a$$

$$= 2 \sin 3a \, (1 + \cos 2a)$$

$$= 2 \sin 3a \times 2 \cos^2 a$$

$$= 4 \sin 3a . \cos^2 a$$

مثال ۲ـ

$$S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a$$

برای تبدیل نمودن S بحاصل ضرب بترتیب مینویسیم:

$$S = (\sin a + \sin 4a) + (\sin 2a + \sin 3a)$$

$$= 2 \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{3a}{2} + 2 \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{5a}{2} \left(\cos \frac{3a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \frac{5a}{2} \times 2 \cos a \cos \frac{a}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{5a}{2} \cos a \cos \frac{a}{2}$$

تبصره - این دو مثال و از مثالهای زیر را و کلی برای محاسبه پذیر نمودن عبارتی که شماره جمله های آن پیش از دو است بدست میآید:

باید کوشش نمود که بتدریج از شماره جمله ها کم شود تا بیک برسد - برای این کار نخست مجموع جبری دو جمله از آن عبارت را مبدّل بحاصل ضرب میکنیم (با ورزش زیاد میتوان جمله ها را بطور شایسته باهم جور کرد) عبارتی بدست میآید که شماره جمله های آن کمتر از شماره جمله های عبارت نخست است - وبهمین ترتیب در عبارت تازه عمل میشود (اگر لازم باشد).

مثال ۲-

$$S = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$$

بترتیب داریم:

$$S = (\sin a + \sin b) + \left[\sin c - \sin(a+b+c)\right]$$

$$= ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲} + ۲\sin\frac{c-a-b-c}{۲}\cos\frac{a+b+۲c}{۲}$$

$$= ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲} - ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\left(\frac{a+b}{۲}+c\right)$$

$$= ۲\sin\frac{a+b}{۲}\left[\cos\frac{a-b}{۲} - \cos\left(\frac{a+b}{۲}+c\right)\right]$$

$$= ۲ \sin \frac{a+b}{۲} \times ۲ \sin \frac{b+c}{۲} \sin \frac{c+a}{۲}$$

$$= ۴ \sin \frac{a+b}{۲} \sin \frac{b+c}{۲} \sin \frac{c+a}{۲}$$

ونیز $C = \cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c)$

را بترتیب چنین تبدیل مینمائیم:

$$C = (\cos a + \cos b) + [\cos c + \cos(a+b+c)]$$

$$= ۲ \cos \frac{a+b}{۲} \cos \frac{a-b}{۲} + ۲ \cos\left(\frac{a+b}{۲} + c\right) . \cos \frac{a+b}{۲}$$

$$= ۲ \cos \frac{a+b}{۲} \left[\cos \frac{a-b}{۲} + \cos\left(\frac{a+b}{۲} + c\right)\right]$$

$$= ۴ \cos \frac{a+b}{۲} \cos \frac{a+c}{۲} \cos \frac{b+c}{۲}$$

مثال ۴ - میخواهیم عبارت $1 + \sin a$ را محاسبه پذیر بالگاریتم نمائیم . باآنکه این عبارت بصورت مجموع جبری دو خط مثلثاتی نیست ولی اگر بجای ۱ بنویسیم $\sin \frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت :

$$1 + \sin a = \sin \frac{\pi}{۲} + \sin a$$

$$= ۲ \sin\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{a}{۲}\right) \cos\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{a}{۲}\right)$$

ولی $\frac{\pi}{۴} - \frac{a}{۲}$ و $\frac{\pi}{۴} + \frac{a}{۲}$ متمم یکدیگرند بنابرین

$$1 + \sin a = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$$

و یا

$$1 + \sin a = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$

همچنین میتوان $1 - \sin a$ و $1 + \cos a$ و $1 - \cos a$ را بصورت حاصل ضرب نوشت :

$$1 - \sin a = \sin\frac{\pi}{2} - \sin a$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$$

$$= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$

$$= 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$$

درعبارت های $1 + \cos a$ و $1 - \cos a$ بجای ۱ میگذاریم $\cos 0$:

$$1 + \cos a = \cos 0 + \cos a$$

$$= 2 \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{a}{2} = 2 \cos^2\frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = \cos 0 - \cos a$$

$$= 2 \sin\frac{a}{2} \cdot \sin\frac{a}{2} = 2 \sin^2\frac{a}{2}$$

این دو اتحاد همان اتحادهای (۲۶) و (۲۷) است.

تبصره - مانند مثال بالا هرگاه در عبارتی عددهائی مانند $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\sqrt{3}$ باشد میتوان برای تبدیل کردن آن عبارت این عددها را بصورت خط‌های مثلثاتی نوشت:

مثال ۵ - برای محاسبه پذیر نمودن $\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}$ میتوان بجای ۱ تانژانت $\frac{\pi}{4}$ نوشت:

$$\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}=\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\,a}{tg\frac{\pi}{4}-tg\,a}$$

و بنا بدستور (۴۰)

$$=\frac{\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+a)}{\cos\frac{\pi}{4}.\cos a}}{\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}-a)}{\cos\frac{\pi}{4}.\cos a}}$$

$$=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+a)}{\sin(\frac{\pi}{4}-a)}=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+a)}{\cos(\frac{\pi}{4}+a)}$$

$$=tg(\frac{\pi}{4}+a)$$

میتوان این نتیجه را بترتیب زیر زودتر بدست آورد:

$$\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}=\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\,a}{1-1\times tg\,a}=\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\,a}{1-tg\frac{\pi}{4}\,tg\,a}=tg(\frac{\pi}{4}+a)$$

همچنین خواهیم یافت:

$$\frac{1-\tan a}{1+\tan a}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan a}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan a}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

مثال ۶-

$$S=\sin a+\sin 2a+\sin 3a$$

بترتیب داریم:

$$S=(\sin a+\sin 3a)+\sin 2a$$

$$=2\sin 2a\cos a+\sin 2a$$

حال با اینکه $\sin 2a$ را سازو میگیریم بترتیب خواهیم داشت:

$$S=\sin 2a(2\cos a+1)=2\sin 2a\left(\cos a+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sin 2a\left(\cos a+\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\sin 2a\cdot\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

و یا در جمله دوم بجای $\sin 2a$ میگذاریم $2\sin a\cdot\cos a$ و خواهیم داشت:

$$S=2\sin 2a\cos a+2\sin a\cdot\cos a$$

$$=2\cos a(\sin 2a+\sin a)=4\cos a\cdot\sin\frac{3a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}$$

مثال ۷- تبدیل عبارت $A = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

بجای $\sqrt{3}$ میتوان $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ گذاشت :

$$A = \sin x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\cos x$$

$$= \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$

$$= \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

تبصره - بطور کلی هر عدد جبری را میتوان بصورت خط مثلثاتی نوشت :
اگر قدر مطلق آن از (۱) کوچکتر باشد میتوان آن عدد را سینوس یا سینوس متمم یا تانژانت و یا تانژانت متمم کمانی گرفت. و برابر با تانژانت یا تانژانت متمم کمانی خواهد بود هرگاه قدر مطلقش بزرگتر از (۱) باشد (در هر دو حالت میتوان آن کمان را از روی جدول بدست آورد).

مثال ۸ - میخواهیم $\frac{1}{3} + \cos x$ را محاسبه پذیر با لگاریتم نمائیم.

- عدد $\frac{1}{3}$ را میتوان سینوس متمم کمانی گرفت که آنرا α مینامیم

بنابرین : $(\alpha = 12^\circ\ 22'\ 27'')$

$$\frac{1}{3} + \cos x = \cos\alpha + \cos x$$

$$= 2\cos\frac{\alpha + x}{2}\cos\frac{x - \alpha}{2}$$

پس اگر x بازنیه اندازه گرفته شده باشد خواهیم داشت :

$$\frac{1}{3} + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + 8^{\circ}\,44'\,43''5\right)\cos\left(\frac{x}{2} - 8^{\circ}\,44'\,43''5\right)$$

۱۱- تبدیل عبارت کلی $a\sin x + b\cos x$ به حاصل ضرب عبارت

$\sin x + \sqrt{3}\cos x$ (مثال ۷) صورت مخصوصی است ازین عبارت کلی که در آن a برابر (۱) و b برابر $\sqrt{3}$ میباشد . چنانکه دیدیم راه تبدیل نمودن آن این بود که $\sqrt{3}$ را تانژانت $\frac{\pi}{3}$ بگیریم (میتوان نیز بجای $\sqrt{3}$ تانژانت متمم $\frac{\pi}{6}$ گذاشت) .

همین راه را برای تبدیل نمودن هر عبارتی که بصورت $a\sin x + b\cos x$ باشد بکار میبریم . برای اینکار نخست آنرا چنین مینویسیم :

$$a\sin x + b\cos x = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right)$$

و چون میتوانیم همیشه کمانی مانند φ بدست آوریم که تانژانت آن برابر عدد جبری $\frac{b}{a}$ باشد $tg\,\varphi = \frac{b}{a}$

پس میتوان عبارت بالا را چنین نوشت :

$$a \sin x + b \cos x = a(\sin x + tg\varphi \cos x)$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi}(\sin x \cos\varphi + \sin\varphi \cos x)$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi} \sin(x + \varphi)$$

که عبارتیست محاسبه پذیر بالگاریتم .

φ در این عبارت یکی از کمانهائی است که تانژانت آن عدد $\frac{b}{a}$ است

و از روی جدول بدست میآید .

مثال - میخواهیم عبارت $A = 2\sin x - 3\cos x$ را که در آن x

برابر $21^\circ 43'$ است بالگاریتم حساب کنیم - نخست ۲ را سازه میگیریم :

$$A = 2\left(\sin x - \frac{3}{2}\cos x\right)$$

حال از روی جدول کمانی φ پیدا میکنیم که تانژانت آن $-\frac{3}{2}$ باشد

$$tg\varphi = -\frac{3}{2}$$

[$\varphi = K \cdot 180^\circ - (56^\circ 18' 29'')$ و میتوان آنرا $-(56^\circ 18' 29'')$

گرفت] .

$$A=\frac{2\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$=\frac{2\sin(31^{\circ}\,43'-56^{\circ}\,18'\,29'')}{\cos 56^{\circ}\,18'\,29''}$$

$$=-\frac{2\sin 24^{\circ}\,35'\,29''}{\cos 56^{\circ}\,18'\,29''}$$

A منفی است نخست $-A$ را حساب می کنیم :

$$\log(-A)=\log 2+\log\sin 24^{\circ}\,35'\,29''+\operatorname{colog}\cos 56^{\circ}\,18'\,29''$$

$$=0{,}30103+\bar{1}{,}61925+0{,}25592$$

$$=0{,}17620$$

$$-A=1{,}5004$$

$$A=-1{,}5004$$

تبصره - برای تبدیل نمودن $a\sin x+b\cos x$ میتوان نیز b را سازه گرفت و بجای $\frac{a}{b}$ تانژانت کمانی α گذاشت

$$a\sin x+b\cos x=b\left(\frac{a}{b}\sin x+\cos x\right)$$

$$=\frac{b}{\cos\alpha}(\sin\alpha\sin x+\cos\alpha\cos x)$$

$$=\frac{b\cos(x-\alpha)}{\cos\alpha}$$

و نیز چنانکه در پیش اشاره شد میتوان $\frac{b}{a}$ یا $\frac{a}{b}$ را برابر با تانژانت متمم کمانی گرفت
مثلاً اگر $\frac{b}{a}$ را تانژانت متمم β بنامیم خواهیم داشت :

$$a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right) = a\left(\sin x + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cos x\right)$$

$$= \frac{a\cos(x-\beta)}{\sin\beta}$$

(این β متمم آن φ است)

۱۲- تبدیل a^2+b^2 بحاصل ضرب - هرگاه عبارتی بصورت a^2+b^2 باشد و بخواهیم آنرا محاسبه پذیر با لگاریتم نمائیم نخست آنرا چنین مینویسیم:

$$a^2+b^2 = a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

و چون میتوان همیشه کمانی φ (میان ۰ و $\frac{\pi}{2}$) بدست آورد که تانژانت آن برابر $\left|\frac{b}{a}\right|$ باشد

$$tg\,\varphi = \left|\frac{b}{a}\right|$$

پس خواهیم داشت :

$$a^2+b^2 = a^2(1+tg^2\varphi)$$

$$= \frac{a^2}{\cos^2\varphi} = \left(\frac{|a|}{\cos\varphi}\right)^2$$

$$\log tg\,\varphi = \log|b| + colog\,|a|$$

$$\log(a^2+b^2) = 2(\log|a| + colog\cos\varphi)$$

تبصره - اگر در عبارت $a^2 + b^2$ جمله بزرگتر را سازه بگیریم و اگر فرض کنیم این جمله بزرگتر a^2 باشد در اینصورت $\frac{b^2}{a^2}$ از (۱) کوچکتر است ومیتوان آنرا برابر بسینوس متمم کمانی α گرفت

$$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

وخواهیم داشت :

$$a^2 + b^2 = a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2(1 + \cos\alpha)$$

$$= 2a^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\log\cos\alpha = 2(\log|a| + \operatorname{colog}|b|)$$

$$\log(a^2 + b^2) = \log 2 + 2\left(\log\cos\frac{\alpha}{2} + \log|a|\right)$$

مثال - میخواهیم $S = \cos^2 116^\circ\ 24' + \sin^2 43^\circ\ 36'$ را حساب کنیم.

راه نخست :

$$S = \sin^2 43^\circ\ 36'\left(1 + \frac{\cos^2 116^\circ\ 24'}{\sin^2 43^\circ\ 36'}\right)$$

$$tg\varphi = \left|\frac{\cos 116^\circ\ 24'}{\sin 43^\circ\ 36'}\right|$$

$$S = \frac{\sin^2 43^\circ\ 36'}{\cos^2\varphi}$$

$$\log tg\,\varphi = \log |\cos ۱۱۶^\circ\ ۲۴'| + colog \sin ۴۳^\circ\ ۳۶'$$

$$= \log \sin ۲۶^\circ\ ۲۴' + colog \sin ۴۳^\circ\ ۳۶'$$

$$= \bar{۱}٫۶۴۸۰۰ + ۰٫۱۶۱۳۹$$

$$= \bar{۱}٫۸۰۹۳۹$$

$$\varphi = ۳۲^\circ\ ۴۸'\ ۴۳''$$

$$\log \cos \varphi = \bar{۱}٫۹۲۴۵۱$$

$$\log S = ۲\,(\log \sin ۴۳^\circ\ ۳۶' + colog \cos \varphi)$$

$$= ۲\,(\bar{۱}٫۸۳۸۶۱ + ۰٫۰۷۵۴۹)$$

$$= ۲ \times \bar{۱}٫۹۱۴۱۰ = \bar{۱}٫۸۲۸۲۰$$

$$S = ۰٫۶۷۳۲۸$$

راه دوّم - $\cos ۱۱۶^\circ\ ۲۴'$ برابر است با $-\sin ۲۶^\circ\ ۲۴'$

پس $\cos^۲ ۱۱۶^\circ\ ۲۴' = \sin^۲ ۲۶^\circ\ ۲۴'$

حال چون $\sin ۲۶^\circ\ ۲۴'$ از $\sin ۴۳^\circ\ ۳۶'$ کوچکتر است

چنین می‌نویسیم:

$$S = \sin^{۲} ۴۳^{\circ}\ ۳۶' \,(۱ + \cos\alpha$$

که در آن $$\cos\alpha = \frac{\sin^{۲} ۲۶'\ ۲۴''}{\sin^{۲} ۴۳^{\circ}\ ۳۶'}$$

پس $$S = ۲ \sin^{۲} ۴۳^{\circ}\ ۳۶' \cdot \cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

$$\log\cos\alpha = ۲\,(\log\sin ۲۶'\ ۲۴' + \operatorname{colog}\sin ۴۳^{\circ}\ ۳۶')$$

$$= ۲ \times \bar{۱},۸۰۹۳۹$$

$$= \bar{۱},۶۱۸۷۸$$

$$\alpha = ۶۵^{\circ}\ ۲۶'\ ۱۱''$$

$$\frac{\alpha}{۲} = ۳۲^{\circ}\ ۴۳'\ ۶''$$

$$\log S = \log ۲ + ۲\,(\log\sin ۴۳^{\circ}\ ۳۶' + \log\cos ۳۲^{\circ}\ ۴۳'\ ۳۶')$$

$$= ۰,۳۰۱۰۳ + ۲\,(\bar{۱},۸۳۸۶۱ + \bar{۱},۹۲۴۹۷)$$

$$= ۰,۳۰۱۰۳ + ۲ \times \bar{۱},۷۶۳۵۸ = \bar{۱},۸۲۸۱۹$$

$$S = ۰,۶۷۳۲۲$$

تبصره ـ اختلاف میان دو نتیجه از آنجا است که تقریباً هیچیک از لگاریتمهائی
که در جدول پنج پیکری یافت میشود درست نیست و هر لگاریتم با یک سه‌هزارم تقریب

نوشته شده است :

۱۳- تبدیل $a^2 - b^2$. هرگاه عبارتی بصورت $a^2 - b^2$ باشد و بخواهیم آنرا محاسبه پذیر بالگاریتم نمائیم اگر a^2 از b^2 بزرگتر باشد مینویسیم :

$$a^2 - b^2 = a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

و میتوانیم $\frac{b}{a}$ را سینوس (یا سینوس متمم) کمانی φ بگیریم

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin\varphi = \frac{b}{a}$$

و خواهیم داشت :

$$a^2 - b^2 = a^2(1 - \sin^2\varphi) = a^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$$\log(a^2 - b^2) = 2(\log|a| + \log\cos\varphi)$$

واگر a^2 کوچکتر از b^2 باشد نخست $a^2 - b^2$ را حساب میکنیم که مثبت است :

$$b^2 - a^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

و $\frac{a}{b}$ را میتوان برابر سینوس (یا سینوس متمم) کمانی α گرفت :

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin\alpha = \frac{a}{b}$$

بنابرین

$$b^2 - a^2 = b^2(1 - \sin^2\alpha) = b^2\cos^2\alpha$$

$$\log\left[-(a^2 - b^2)\right] = 2(\log|b| + \log\cos\alpha)$$

ورزش

بفرض اینکه α برابر ۲۶° ۳۵′ ۱۵″ باشد حساب کنید عبارتهای زیررا:

(۱) $$\frac{2\cos 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha + 1}$$

(۲) $$\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$$

(۳) $$\frac{1{,}873}{\sqrt{1 + (1{,}873)^2\cos^2\alpha}}$$

(۴) $$\cos 3\alpha - \cos 2\alpha + \cos\alpha$$

(۵) $$\sqrt[3]{\frac{\sin^2 3\alpha + \cot^2 2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

(۶) $$\cos\alpha + \sin\alpha$$

(۷) $$5\cos\alpha - 3\sin\alpha$$

بخش چهارم

بستگی های میان گوشه ها و پهلوهای یک سه بر
گشایش سه برهای غیرراست گوشه

در کتاب مثلثات سال چهارم (صفحه ۴۰ ببعد) دیدیم که میان پهلوها و گوشه های یک سه بر راست گوشه بستگی هائی هست (بستگی های ۳۱ تا ۳۵ از همین کتاب) و در ضمن چهار مثال دیدیم که از روی آن بستگی ها میتوان سه بر را (در حالتهای ساده) گشود.

اینک میخواهیم بستگی هائی میان گوشه ها و پهلوهای یک سه بر غیرراست گوشه یافته از روی آن به گشایش سه برها بپردازیم.

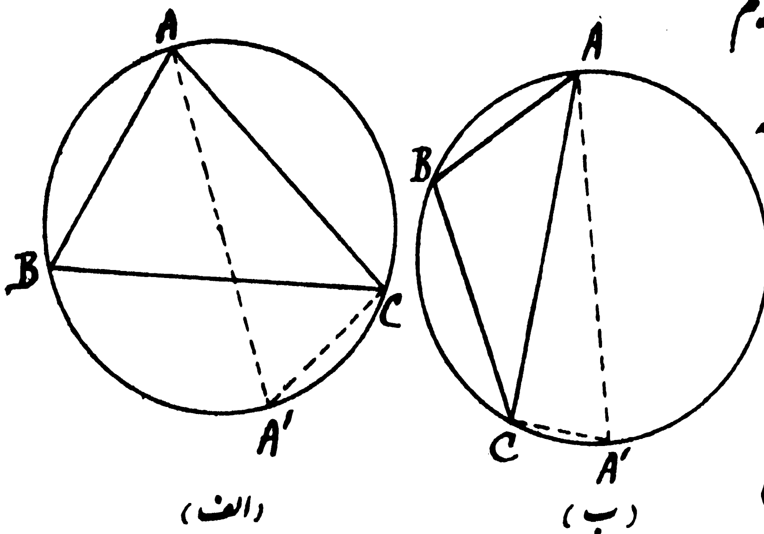
این بستگی ها را بشکل چند قضیه بیان می کنیم:

۱۴- قضیّه ۱- قضیه سینوس ها- درازای پهلوهای هر سه بر متناسب است با سینوس گوشه های روبروی آن پهلوها و نسبت درازای هر پهلو به سینوس گوشه روبروی آن برابر است با درازای میان بُر دائرهٔ محیطی سه بر:

$$(41) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

برای ثابت کردن قضیّه دایره محیطی سه بر را کشیده و مثلاً میان بری را

که از A میگذرد میکشیم



(الف) (ب)

تا پیرامون دایره را در نقطهٔ دیگری مانند 'A تلاقی کند. در سه بر راست گوشهٔ 'ACA (c گوشهٔ راست)

'AA برابر 2R و AC برابر b وگوشهٔ 'A یا برابر $\hat{B}$ است (اگر $\hat{B}$ تند باشد مانند شکل الف) و یا مکمّل $\hat{B}$ است (اگر $\hat{B}$ باز باشد مانند شکل ب)

در هر دو حالت $\sin B = \sin C\hat{A'}A$

حال در این سه بر راست گوشه داریم :

$$AC = b = 2R \sin C\hat{A'}A = 2R \sin B$$

و یا

$$\frac{b}{\sin B} = 2R$$

و بهمین روال از سه بر 'AA B بدست میآید :

$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

وهمچنین مثلاً ازکشیدن میانبُر BB' بستگی $\frac{a}{\sin A} = 2R$ نمایانده میشود

تبصره ۱ـ ازروی قضیۀ سینوس ها دو بستگی میان پهلو ها وگوشه های یک سه بر بدست آمد ودرهندسه دیده ایم که میان گوشه ها هم یک بستگی هست :

$$A + B + C = 180^\circ$$

پس همیشه سه بستگی میان پهلو ها وگوشه های هرسه بُر موجود است وبنابرین هرگاه سه جزء از ۶ جزء اصلی یک سه گوشه را داشته باشیم (که دست کم یکی پهلو باشد) میتوان سه جزء دیگر آنرا ازروی این سه بستگی حساب کرد (یعنی سه بر را گشود) چنانکه در هندسه هم دیده ایم که با داشتن سه جزء (که دست کم یکی پهلو باشد) میتوان درحالت کلی سه گوشه را کشیده جزء های ناشناس را اندازه گرفت .

تبصره ۲ـ روشن است که بستگیهای بالا برای یک سه بر راست گوشه هم درست است :

اگر C را گوشه راست بگیریم بستگی های بالا بصورت بستگیهای (۳۲) (۳۳) و (۳۴) درمیآید .

۱۵- از روی قضیهٔ سینوس ها هرگاه

۱- از سه بری یک پهلو و دو گوشه را بشناسیم یا هرگاه

۲- از سه بری دو پهلو و گوشه روبرو بیکی از آن دو را بشناسیم میتوان آن

بر را گشود:

حالت نخست - از سه بری پهلوی a و دو گوشه A و B را بشناسیم

گشایش سه بر - گوشه C از روی دستور

$$C = 180 - (A + B)$$

بدست میآید.

برای یافتن پهلوهای b و c بستگی های سینوس ها (بستگی های ۴۱) را بکار

میبریم:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

در تناسب نخست b ناشناس است و سه جزء دیگر را می شناسیم و از تناسب دوم

هم تنها c را نمی شناسیم - بنابرین از روی این دو تناسب میتوان b و c را (دو بگ

لگاریتم) بدست آورد :

$$\log b = \log a + \operatorname{colog} \sin A + \log \sin B$$

$$\log c = \log a + \operatorname{colog} \sin A + \log \sin C$$

مثال $a =$ ۳۵۲,۷۵ متر $\hat{A} =$ ۶۳° ۱۷′ ۳۰″ و $\hat{B} =$ ۵۲° ۲۴′ ۲۵″

میخواهیم $\hat{C}$ و b و c را حساب کنیم.

گشایش مسئله باید به ترتیبی انجام شود که در صفحه ۷۴ نوشته شده.

ورزش

سه برهای زیر را بگشایید.

(۱) $a =$ ۳۳,۲۲۶ متر و $B =$ ۴۹° ۱۵′ و $C =$ ۶۲° ۱۷′ ۳۴″

(۲) $b =$ ۰,۱۷۶۹ و $C =$ ۷۵° ۱۶′ ۲۰″ و $A =$ ۵۰° ۲۲′ ۱۵″

(۳) $c =$ ۱۸۷۵۶ و $A =$ ۴۹° ۱۸′ ۲۰″ و $B =$ ۶۸° ۱۸′ ۱۶″

حالت دوم - از سه بری دو پهلوی a و b و گوشه A (روبرو به a) را می شناسیم.

گشایش - گوشه B از دستور

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \quad \text{و یا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

بدست میآید:

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A + \operatorname{colog} a$$

پس از B گوشهٔ C بدست میآید

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

سپس c از روی

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\log c = \log a + \log \sin C + \operatorname{colog} \sin A$$

مثال

$$A = 38^\circ\ 15'\ 27'' \ ; \ b = 18{,}706 \ ; \ a = 12{,}323$$

$$\log b = 1{,}27203$$

$$\log \sin A = \bar{1}{,}79183$$

$$\underline{\operatorname{colog} a} = \underline{\bar{2}{,}90752}$$

$$\log \sin B = \bar{1}{,}97138$$

$$B = 69^\circ\ 25'\ 36''$$

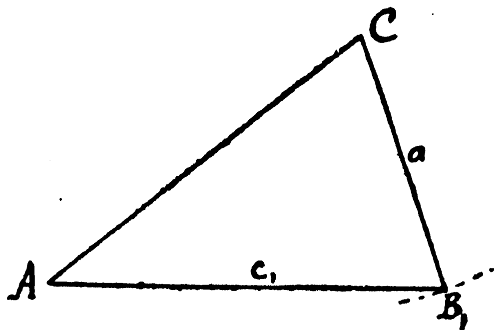
ولی B که از روی لگاریتم «سینوس» بدست میآید میتواند دارای دو مقدار باشد:

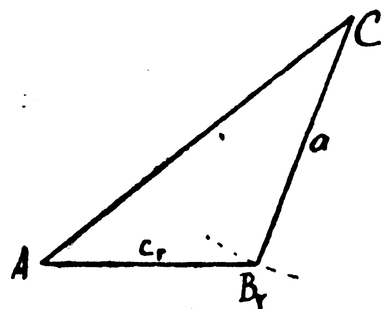
$$B_1 = ۶۹° \; ۲۵' \; ۳۶''$$

$$B_2 = ۱۸۰° - B_1 = ۱۱۰° \; ۳۴' \; ۲۴''$$

(B_1 و B_2 هر دو دارای یک سینوس و بنابرین دارای یک لگاریتم سینوس میباشند)

حال برای اینکه ببینیم آیا B_1 و B_2 هر دو پاسخ میباشند یا یکی از آنها کافی است در نظر داشته باشیم (هندسهٔ سال دوم شمارهٔ ۱۸۶) که هرگاه گوشهٔ داده شده تند باشد و پهلوی روبروی آن (a) کوچکتر از پهلوی دیگر (c) شاید مسئله دارای دو پاسخ باشد یعنی شاید با آنچه داریم بتوانیم دو سه بر بکشیم - پس این جا هم B_1 پاسخ است و هم B_2 و بنابرین C هم دارای دو مقدار C_1 و C_2 و c نیز دارای دو مقدار c_1 و c_2 خواهد بود (شکل)





گشایش و ترتیب آن در صفحهٔ ۷۵ نوشته شده است

حالت نخست – گشایش سه بری که یک پهلو و دو گوشه آن داده شده

داشته‌ها

$a =$ ۳۵۲,۷۵ متر

$A =$ ۶۳° ۱۷′ ۳۰″

$B =$ ۵۲° ۳۴′ ۲۵″

دستورها

$$C = 180° - (A + B)$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

پاسخ

$b =$ ۳۱۳,۵۹ متر

$c =$ ۳۵۵,۳۳ متر

$C =$ ۶۴° ۸′ ۵″

محاسبه‌های فرعی

$A + B =$ ۱۱۵° ۵۱′ ۵۵″ $C =$ ۶۴° ۸′ ۵″

۳۵۲۷ ۵۴۷۴۱ (D = ۱۲)
۵ ۶
$\log a =$ ۲,۵۴۷۴۷

۶۳° ۱۷′ ۱̄,۹۵۰۹۷ (D = ۶)
۳۰″ ۳
$\log \sin A =$ ۱̄,۹۵۱۰۰
$\operatorname{colog} \sin A =$ ۰,۰۴۹۰۰

۵۲° ۳۴′ ۱̄,۸۹۹۸۵ (D ۰)
۲۵″ ۴
$\log \sin B =$ ۱̄,۸۹۹۸۹

۶۴° ۸′ ۱̄,۹۵۴۱۵
۵″ ۵ (D = ۶)
$\log \sin C =$ ۱̄,۹۵۴۱۶

محاسبه‌های اصلی

محاسبهٔ b

۲,۵۴۷۴۷
۱̄,۸۹۹۸۹
۰,۰۴۹۰۰
$\log b =$ ۲,۴۹۶۳۶

۴۹۶۲۴ ۳۱۳۵ (D = ۱۴)
۱۲ ۹
$b =$ ۳۱۳,۵۹

محاسبهٔ c

۲,۵۴۷۴۷
۱̄,۹۵۴۱۶
۰,۰۴۹۰۰
$\log c =$ ۲,۵۵۰۶۳

۵۵۰۶۰ ۳۵۵۳ (D = ۱۲)
۳ ۲۵
$c =$ ۳۵۵,۳۳

حالت دوم: گشایش سه بری که دو پهلو و گوشه روبرو بیکی از آن دو داده شده.

داشته ها:
$a = ۱۲٫۳۷۳$ متر
$b = ۱۸٫۷۰۶$ متر
$A = ۳۸°\ ۱۵'\ ۲۰''$

دستورها:
$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$
$$C = ۱۸۰° - (A + B)$$
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

پاسخ:
$B_1 = ۶۹°\ ۲۵'\ ۳۶''$
$C_1 = ۷۲°\ ۱۸'\ ۵۷''$
$c_1 = ۱۹٫۰۳۸$ متر

$B_2 = ۱۱۰°\ ۳۴'\ ۲۴''$
$C_2 = ۳۱°\ ۱'\ ۹''$
$c_2 = ۱۰٫۳۴۲$ متر

محاسبه های فرعی	محاسبه های اصلی
(D=۳۵) ۱۲۳۷ ، ۳ ؛ ۰۹۲۳۷ ، ۱۰۵ ؛ $\log a = ۱٫۰۹۲۴۸$ ؛ $\operatorname{colog} a = \bar{۲}٫۹۰۷۵۲$	**محاسبهٔ B** ؛ ۱٫۲۷۲۰۳ ؛ $\bar{۱}$٫۷۹۱۸۳ ؛ $\bar{۲}$٫۹۰۷۵۲ ؛ $\log \sin B = \bar{۱}٫۹۷۱۳۸$ ؛ ۹۷۱۳۵ — ۶۹° ۲۵′ ؛ (D = ۵) ۳ — ۳۶″ ؛ $B_1 =$ ۶۹° ۲۵′ ۳۶″ ؛ $B_2 =$ ۱۱۰° ۳۴′ ۲۴″
(D=۳۲) ۱۸۷۰ ، ۶ ؛ ۲۷۱۸۴ ، ۱۹۲ ؛ $\log b = ۱٫۲۷۲۰۳$	**C_2 و C_1** ؛ $A + B_1 =$ ۱۰۷° ۴۱′ ۳″ ؛ $A + B_2 =$ ۱۴۸° ۴۹′ ۵۱″
(D=۱۶) ۳۸° ۱۵′ ، ۲۰″ ، ۷ ؛ $\bar{۱}$٫۷۹۱۷۶ ، ۵۳ ، ۱۸۷ ؛ $\log \sin A = \bar{۱}٫۷۹۱۸۳$ ؛ $\operatorname{colog} \sin A = ۰٫۲۰۸۱۷$	**محاسبهٔ c_1** ؛ ۱٫۰۹۲۴۸ ؛ $\bar{۱}$٫۹۷۸۹۸ ؛ ۰٫۲۰۸۱۷ ؛ $\log c_1 =$ ۱٫۲۷۹۶۳ ؛ (D = ۲۳) ۹۴۴ ، ۱۹ — ۱۹۰۳ ، ۸ ؛ $c_1 =$ ۱۹٫۰۳۸
(D=۴) ۷۲° ۱۸′ ، ۵۷″ ؛ $\bar{۱}$٫۹۷۸۹۴ ، ۴ ؛ $\log \sin C_1 = \bar{۱}٫۹۷۸۹۸$	**محاسبهٔ c_2** ؛ ۱٫۰۹۲۴۸ ؛ $\bar{۱}$٫۷۱۳۹۶ ؛ ۰٫۲۰۸۱۷ ؛ $\log c_2 =$ ۱٫۰۱۴۶۱
(D=۲۱) ۳۱° ۱′ ، ۹″ ؛ $\bar{۱}$٫۷۱۳۹۳ ، ۳ ؛ $\log \sin C_2 = \bar{۱}٫۷۱۳۹۶$	
(D=۴۲) ۰۱۴۵۲ ، ۹ ؛ ۱۰۳۴ ، ۲ ؛ $c_2 =$ ۱۰٫۳۴۲	

تبصره - در هر مثال عددی بهتر این است که پیش از گشایش مثلثاتی کوشش کنیم سه بر ناشناس را از راه هندسی بگشائیم از نیرو دست کم میتوان پی برد با اینکه مسئله گشایش پذیر هست یا نیست و یا اینکه چند پاسخ خواهد داشت - و اگر گشایش هندسی با دقت باشد میتوان درستی محاسبه های مثلثاتی را نیز از روی آن بررسی نمود .

ورزش

سه برهای زیر را بگشائید :

(۱)	۶٫۱۷۵۶ = a	۸٫۲۱۹۳ = b	۳۰ ۲۵′ ۳۰° = A
(۲)	۱٫۱۵۶ = b	۶٫۳۱۲ = c	۳۰° = B
(۳)	۱۰٫۷۳ = b	۲۷٫۸۰ = a	۴۰° ۵′ = B
(۴)	۶۳٫۹۵۲ = a	۷۵٫۷۶ = c	۱۱° ۳′ = C
(۵)	۷۰ = a	۶۵ = b	۱۰° = B

۱۶- قضیهٔ ۲ - در هر سه بر نسبت مجموع دو پهلو به تفاضل آنها برابر است با نسبت تانژانت نیمهٔ مجموع گوشه های روبرو به آن پهلوها به نیمهٔ تانژانت تفاضل همان دو گوشه یعنی :

$$(۴۲)\begin{cases} \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{tg\,\frac{A-B}{2}}{tg\,\frac{A+B}{2}} \\[2em] \dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{tg\,\frac{B-C}{2}}{tg\,\frac{B+C}{2}} \\[2em] \dfrac{c-a}{c+a} = \dfrac{tg\,\frac{C-A}{2}}{tg\,\frac{C+A}{2}} \end{cases}$$

برای نمایاندن درستی تناسب نخست تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

را بکار میبریم:

از روی این تناسب بترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin b}{\sin A + \sin B}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A-B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$= tg\,\frac{A-B}{2}\,\cot\frac{A+B}{2}$$

$$= \frac{tg\,\frac{A-B}{2}}{tg\,\frac{A+B}{2}}$$

۱۷- هرگاه از سه بری دو پهلو و گوشهٔ میان آن دو پهلو را بشناسیم میتوان از روی قضیّهٔ ۲ جزءهای ناشناس آن سه بر را (بکمک لگاریتم) حساب نمود

(حالت سوّم گشایش سه برها):

مثلاً اگر a و b و گوشهٔ C را بشناسیم گشایش سه بر بترتیب زیر خواهد بود

(از دو پهلوی داده شده آن را که بزرگتر است a مینامیم بنابرین A نیز از B بزرگتر است):

نخست A و B را حساب میکنیم - چون C داده میشود پس $B + A$ را میشناسیم:

$$A + B = 180^\circ - C$$

$A - B$ هم از روی قضیّهٔ ۲ بدست میآید:

$$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot tg\,\frac{A+B}{2}$$

در این همچندی میتوان بجای $tg\,\frac{A+B}{2}$ برابرش $\cot\frac{C}{2}$ را نهاد زیرا

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

پس

$$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

هر دو طرف این همچندی بنا بفرض مثبت است و میتوان از آن لگاریتم گرفت

$$\log tg \frac{A-B}{۲} = \log(a-b) + colog(a+b) + \log cot \frac{C}{۲}$$

وقتی که بدین ترتیب $\frac{A-B}{۲}$ را حساب کردیم گوشه‌های A و B بدست میآید

اگر مثلاً $\frac{A-B}{۲}$ برابر α باشد از روی

$$\frac{A+B}{۲} = ۹۰° - \frac{C}{۲}$$

$$\frac{A-B}{۲} = \alpha$$

خواهیم داشت:

$$A = ۹۰° - \frac{C}{۲} + \alpha$$

$$B = ۹۰° - \frac{C}{۲} - \alpha$$

سپس c از روی قضیهٔ سینوسها حساب میشود مثلاً

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

مثال $a = ۴۷٫۶۰۳۰$ متر $b = ۳۸٫۷۴۸$ متر $C = ۱۰۷° ۲۲' ۲۴''$

گشایش و ترتیب آن در صفحهٔ ۸۸ نوشته شده است.

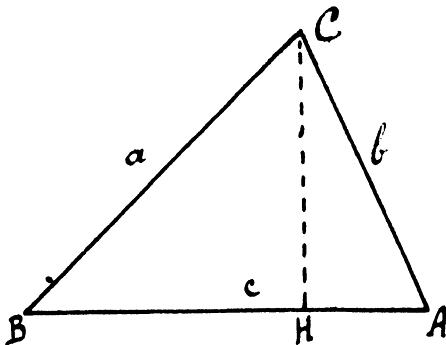
ورزش

سه برهای زیر را بگشائید:

(۱) $a = ۷۱۶٫۷۵$ و $b = ۲۹۴٫۵۳$ ، $C = ۶۴° ۵۴' ۳۰''$

(۲) $b = ۷۵٫۸۰$ ، $c = ۱۱۵٫۷۵$ ، $A = ۴۰^\circ\ ۳۷'\ ۲۰''$

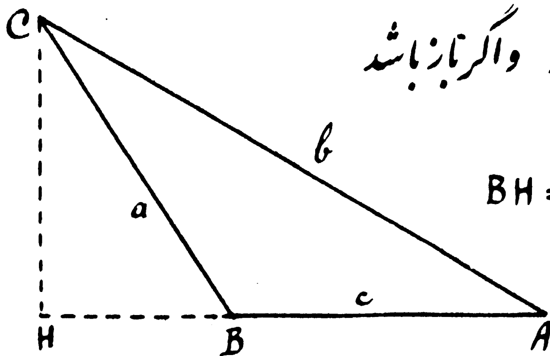
۱۸ - قضیهٔ ۳ - قضیهٔ سینوس متمم ها - در هندسه دیده ایم که هرگاه گوشه B تند باشد



$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲c.BH$$

و هرگاه $\hat{B}$ باز باشد

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ + ۲c.BH$$



ولی اگر $\hat{B}$ تند باشد $BH = a\cos B$ و اگر باز باشد

$$BH = a\cos\widehat{CBH} = a\cos(۱۸۰^\circ - B) = -a\cos B$$

بنابرین خواه B تند باشد یا باز

$$b^۲ = c^۲ + a^۲ - ۲ca.\cos B$$

و بهمین روال :

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab.\cos C$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A$$

یعنی در هر سه بر توان دوم هر یک از پهلوها (خواه گوشه روبروی آن تند باشد خواه باز) برابر است با مجموع توانهای دوم دو پهلوی دیگر منهای

دو برابر حاصل ضرب آن دو پهلو در سینوس متمم گوشهٔ میان آن دو.

۱۹- هرگاه سه پهلوی یک سه بر را بشناسیم میتوان از روی قضیهٔ سینوس متمم ها سه بر را گشود یعنی گوشه های آنرا حساب کرد (حالت چهارم گشایش سه برها):

اگر a و b و c پهلوهای سه بر را بشناسیم گوشهٔ A مثلاً از دستور

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

حساب میشود:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

و همچنین گوشه های دیگر.

عیب این دستور این است که عبارت طرف دوم آن محاسبه پذیر با لگاریتم نیست ولی میتوان بترتیب زیر گوشه ها را بکمک لگاریتم محاسبه نمود:

چون
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

پس
$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}$$

حال اگر $a + b + c$ یعنی درازای پیرامون سه بر را $2p$ بنامیم خواهیم داشت:

$$a+b+c=2p$$

$$a-b+c=2p-2b=2(p-b)$$

$$a+b-c=2p-2c=2(p-c)$$

وهمچنین $-a+b+c=2p-2a=2(p-a)$

پس

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

وبهمین ترتیب خواهیم دید که

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=\frac{2p(p-a)}{bc}$$

وهمچنین $\sin^2\frac{B}{2}$ و $\cos^2\frac{B}{2}$, $\sin^2\frac{C}{2}$ و $\cos^2\frac{C}{2}$ بدست میآید پس با درنظر گرفتن اینکه $\frac{A}{2}$ و $\frac{B}{2}$ و $\frac{C}{2}$ هرسه تند میباشند خواهیم داشت :

$$(43)\quad\begin{cases}\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\end{cases}$$

$$
(۴۴)\quad
\begin{cases}
\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\
\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \\
\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}
\end{cases}
$$

از روی هر یک از این دستورها میتوان گوشه ها را بکمک لگاریتم حساب کرد مثلاً

$$\log \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left[\log(p-b) + \log(p-c) + \mathrm{colog}\, b + \mathrm{colog}\, c\right]$$

ورزش - چه گوشه ایست که لگاریتم سینوس آن $\bar{1},99983$ است؟

لگاریتم سینوس متمم آن $\bar{1},99990$ است؟

لگاریتم تانژانت آن $1,55059$ است؟

از روی این ورزش می بینیم که محاسبهٔ یک گوشه بکمک لگاریتم تانژانت و تانژانت متمم آن دقیق تر از محاسبهٔ همان گوشه بکمک لگاریتم سینوس آن و یا سینوس متمم است

بنابرین بهتر این است که $\mathrm{tg}\frac{A}{2}$ و $\mathrm{tg}\frac{B}{2}$ و $\mathrm{tg}\frac{C}{2}$ را حساب کنیم و برای این کار کافی است که دو طرف هر یک از دستورهای (۴۳) را بر دو طرف نظیر آن از دستورهای (۴۴) بخش نمائیم:

$$(۴۵)\quad \begin{cases} tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ tg\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ tg\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases}$$

بعلاوه اگر از نظر محاسبهٔ گوشه ها دستورهای (۴۳) و (۴۴) و (۴۵) را با هم بسنجیم می بینیم اگر بخواهیم گوشه ها را به کمک دستورهای (۴۳) بدست آوریم باید شش لگاریتم حساب کنیم:

لگاریتم های a و b و c و $p-a$ و $p-b$ و $p-c$

و اگر بخواهیم دستورهای (۴۴) را بکار بریم علاوه بر این شش لگاریتم $\log p$ را باید نیز بگیریم.

ولی با دستورهای (۴۵) داشتن چهار لگاریتم (لگاریم های p و $p-a$ و $p-b$ و $p-c$) کافیست.

اگر $\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ را r بنامیم

$$(۴۶)\qquad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

دستورهای (۴۵) چنین نوشته میشود:

$$(۴۷)\quad \begin{cases} tg\,\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \\ tg\,\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b} \\ tg\,\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c} \end{cases}$$

پس برای آسان نمودن محاسبهٔ گوشه ها نخست $\log r$ را حساب میکنیم

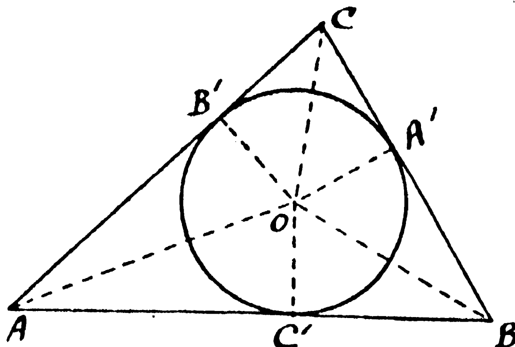
$$\log r = \frac{1}{2}\left[\log(p-a)+\log(p-b)+\log(p-c)+\operatorname{colog} p\right]$$

وسپس خواهیم داشت:

$$\log tg\frac{A}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-a)$$

$$\log tg\frac{B}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-b)$$

$$\log tg\frac{C}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-c)$$



تبصره - هرگاه دایرهٔ محاطی سه بر ABC را بکشیم ومرکز آن را O ونقطه های تماس آنرا با پهلوهای BC و CA و AB بترتیب A' و B' و C' بنامیم بآسانی می بینیم که

$$AB' = AC' = p - a$$

$$BC' = BA' = p - b$$

$$CA' = CB' = p - c$$

پس مثلاً درسه بر راست گوشهٔ AOB' که گوشهٔ $O\hat{A}B'$ برابر $\frac{A}{2}$ است خواهیم داشت:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{OB'}{p-a}$$

که در آن OB' پرتو دایره محاطی است ـ از سنجیدن این بستگی با بستگی نخست از دستورهای (۴۷)

چنین برمیآید که r همانا پرتو دایره محاطی سه بر است.

مثال ـ مطلوبست گشایش سه بری که پهلوهای آن داده میشود:

$a =$ ۳۷۶۳٫۴۵ $b =$ ۴۳۹۲٫۸۷ $c =$ ۵۰۶۹٫۹

گشایش و ترتیب آن در صفحه ۸۹ نوشته شده است.

ورزش

سه برهای زیر را بگشایید:

(۱) $a =$ ۷۳٫۸۵۹ $b =$ ۶۸٫۰۲۵ $c =$ ۵۳٫۷۶۳

(۲) $a =$ ۱٫۰۷۸۰ $b =$ ۰٫۹۶۷۳ $c =$ ۱٫۲۸۳۲

(۳) $a =$ ۴ $b =$ ۵ $c =$ ۶

۲۰ ـ خلاصه ـ ما باید راه گشایش سه برها را در چهار حالت ساده بیاموزیم:

نخست ـ اگر یک پهلو و دو گوشه از سه بر را بشناسیم

دوم ـ اگر دو پهلو و گوشه روبرو بیکی از آن دو را (حالت ابهام)

سوّم ـ دو پهلو و گوشهٔ میان آن دو را .

چهارم ـ اگر سه پهلو را بشناسیم .

چنانکه دیدیم :

در دو حالت نخست و دوّم گشایش سه بر از روی قضیّهٔ سینوس ها انجام میشود

در حالت سوّم گوشه ها را نخست از روی قضیهٔ ۲ صفحهٔ ۷۶ و سپس پهلوی سوم را از روی

قضیّهٔ سینوسها حساب می کنیم .

در حالت چهارم دستورهای (۴۶) و (۴۷) را بکار میبریم .

تبصره ـ هرگاه اندازهٔ جزءهای داده شده عددهائی ساده باشد در دو حالت

سوّم و چهارم نخست قضیه سینوس متمم ها را بکار میبریم و سپس (اگر لازم باشد) قضیّهٔ

سینوسها را .

پهنهٔ سه برها

۲۱ ـ الف ـ سه بر راست گوشه ـ اگر گوشهٔ راست را C بنامیم میدانیم

که S پهنهٔ سه بر راست گوشه چنین است :

$$S = \frac{1}{2} ab$$

حالت سوم ـ گشایش سه‌بری که دو پهلو و گوشه میان آنها داده شده.

داشته‌ها:
a = ۴۷,۶۰۳ متر
b = ۳۸,۷۴۸ متر
C = ۱۰۷° ۲۲′ ۲۴″

دستورها:
$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$
$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$
$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$

پاسخ:
A = ۴۰° ۳۷′ ۲۴″
B = ۳۲° : ۱۲″
c = ۶۹,۷۷۸ متر

محاسبه‌های فرعی

a − b = ۸,۸۵۵
log (a − b) = ۰,۹۴۷۱۹

---

a + b = ۸۶,۳۵۱
(D=۷)　۱۶۳۵ ۱　　۹۳۶۲۶ ۷
log (a + b) = ۱,۹۳۶۲۷
colog (a + b) = ۲̄,۰۶۳۷۳

C/۲ = ۵۳° ۴۱′ ۱۲″
۵۳° ۴۲′　　۱̄,۸۶۶۰۳
(D=۲۷)　−۳۰　　+۱۸
−۸　　۲۶
log cot C/۲ = ۱̄,۸۶۶۲۵

(D=۹)　۴۷۶۰　　۶۷۷۶۱
۳　　۲۷
log a = ۱,۶۷۷۶۴

---

۱۸۰ − C = A + B = ۷۲° ۳۷′ ۳۶″
(D=۴)　۷۲° ۳۷′　　۱̄,۹۷۹۷۰
۳۶″　　۲
log sin C = ۱̄,۹۷۹۷۲

۴۰° ۳۷′　　۱̄,۸۱۳۵۸
(D=۱۴)　۲۰　　۴۷
۴　　۹۳
log sin A = ۱̄,۸۱۳۶۴
colog sin A = ۰,۱۸۶۳۶

محاسبه‌های اصلی

محاسبه $\frac{A-B}{2}$ و A و B

۰,۹۴۷۱۹
۲̄,۰۶۳۷۳
۱̄,۸۶۶۲۵
log tg $\frac{A-B}{2}$ = ۲̄,۸۷۷۱۷
(D=۱۶۹)　۲̄,۸۷۶۱۶　۴°　۱۸′
۱۰۱　　۳۶″
$\frac{A-B}{2}$ = ۴° ۱۸′ ۳۶″
$\frac{A+B}{2}$ = ۳۶° ۱۸′ ۴۸″
A = ۴۰° ۳۷′ ۲۴″
B = ۳۲° ۱۲″

محاسبهٔ c

۱,۶۷۷۶۴
۱̄,۹۷۹۷۲
۰,۱۸۶۳۶
log c = ۱,۸۴۳۷۲
(D=۶)　۸۴۳۶۷　　۶۹۷۷
۵　　۸
c = ۶۹,۷۷۸

حالت چهارم - گشایش سه بری که پهلوهای آن داده شده :

داشته‌ها

$a =$ ۳۷۶۳,۴۵ متر

$b =$ ۴۳۹۲,۸۷ متر

$c =$ ۵۰۶۹,۹۰ متر

$2p =$ ۱۳۲۲۶,۲۲

$p =$ ۶۶۱۳,۱۱

$p-a =$ ۲۸۴۹,۶۶

$p-b =$ ۲۲۲۰,۲۴

$p-c =$ ۱۵۴۳,۲۱

$p =$ ۶۶۱۳,۱۱

دستورها

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$tg\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \qquad tg\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b} \qquad tg\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

پاسخ

$A =$ ۴۶° ۱۱′ ۸″

$B =$ ۵۷° ۲۲′ ۵۲″

$C =$ ۷۶° ۲۵′ ۵۰″

مجموع: ۱۷۹° ۵۹′ ۵۰″

محاسبه‌های فرعی

۶۶۱۳ — ۸۲۰۴۰ ، ۱ — ۶ ، ۱ (D=۶)

$\log p =$ ۳,۸۲۰۴۱

$colog\, p =$ ۴̄,۱۷۹۵۹

۲۸۴۹ — ۴۵۴۶۹ ، ۶ — ۹ ، ۶ — ۹ (D=۱۵)

$\log(p-a) =$ ۳,۴۵۴۷۹

$colog(p-a) =$ ۴̄,۵۴۵۲۱

۲۲۲۰ — ۳۴۶۳۵ ، ۲ — ۴ ، ۴ — ۸ (D=۲۰)

$\log(p-b) =$ ۳,۳۴۶۴۰

$colog(p-b) =$ ۴̄,۶۵۳۶۰

۱۵۴۳ — ۱۸۸۳۷ ، ۲ — ۵۶ ، ۱ — ۲۸ (D=۲۸)

$\log(p-c) =$ ۳,۱۸۸۴۳

$colog(p-c) =$ ۴̄,۸۱۱۵۷

۳,۴۵۴۷۹
۳,۳۴۶۴۰
۳,۱۸۸۴۳
۴̄,۱۷۹۵۹

$2\log r =$ ۶,۱۶۹۲۱

$\log r =$ ۳,۰۸۴۶۰

محاسبه‌های اصلی

محاسبهٔ $\frac{A}{2}$

۳,۰۸۴۶۰
۴̄,۵۴۵۲۱

$\log tg\frac{A}{2} =$ ۱̄,۶۲۹۸۱

۱̄,۶۲۹۶۱ — ۲۳° ۵′

۲۰ — ۳۴″ (D=۳۵)

$\frac{A}{2} =$ ۲۳° ۵′ ۳۴″

محاسبهٔ $\frac{B}{2}$

۳,۰۸۴۶۰
۴̄,۶۵۳۶۰

$\log tg\frac{B}{2} =$ ۱̄,۷۳۸۲۰

۱̄,۷۳۸۰۷ — ۲۸° ۴۱′

۱۳ — ۲۶″ (D=۳۰)

$\frac{B}{2} =$ ۲۸° ۴۱′ ۲۶″

محاسبهٔ $\frac{C}{2}$

۳,۰۸۴۶۰
۴̄,۸۱۱۵۷

$\log tg\frac{C}{2} =$ ۱̄,۸۹۶۱۷

۱̄,۸۹۵۹۳ — ۳۸° ۱۲′

۲۴ — ۵۵″ (D=۲۶)

$\frac{C}{2} =$ ۳۸° ۱۲′ ۵۵″

پس اگر دو پهلوی گوشه راست را بشناسیم (حالت نخست از گشایش سه برهای راست گوشه) همین دستور را بکار میبریم.

واگر وتر c و یک گوشه مثلاً A را بشناسیم (حالت دوم) کافی است در دستور بالا بجای a و b بترتیب $c \sin A$ و $c \cos A$ بگذاریم.

$$s = \frac{1}{2} c^2 \sin A \cos A$$

$$= \frac{1}{4} c^2 \sin 2A$$

واگر یکی از دو پهلوی گوشه راست مثلاً a و یکی از دو گوشه تند مثلاً B بشناسیم (حالت سوم) کافیست در دستور $s = \frac{ab}{2}$ بجای b برابرش $a \operatorname{tg} B$ را بگذاریم:

$$s = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} B$$

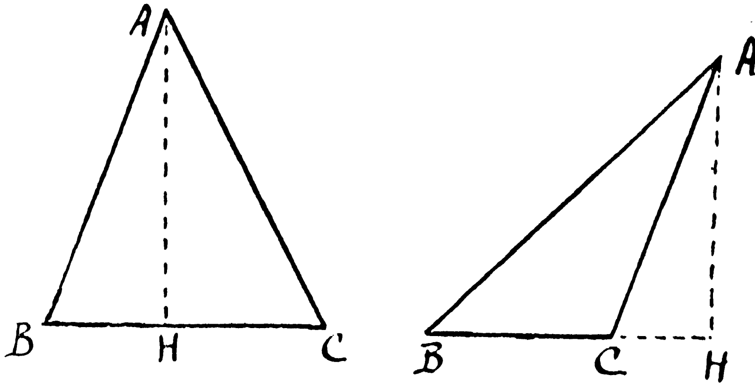
واگر وتر و یکی از دو پهلوی گوشه راست مثلاً b را بشناسیم بجای a میگذاریم $\sqrt{(c+b)(c-b)}$:

$$s = \frac{1}{2} b \sqrt{(c+b)(c-b)}$$

۲۲- ب- پهنه سه برهای غیر راست گوشه- میدانیم پهنه سه بر ABC

(شکل)

$$s = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} a \cdot h$$



ولی h برابر است با $c \sin B$ و یا $b \sin C$ (خواه گوشهٔ B یا C تند باشد یا باز) پس

$$(۲۸) \quad \begin{cases} s = \frac{1}{2} ac \sin B \\ \quad = \frac{1}{2} ab \sin C \\ s = \frac{1}{2} bc \sin A \end{cases}$$

و همچنین

یعنی پهنهٔ هر سه بر برابر است با نیمهٔ حاصل ضرب درازای دو پهلوی آن در سینوس گوشهٔ میان آن دو پهلو.

این دستور را بکار میبریم هرگاه از سه بر دو پهلو و گوشهٔ میان آنها را بشناسیم (حالت سوم گشایش سه برها).

اگر دو گوشه و یک پهلو از سه بر (مثلاً a و A و B) را بشناسیم (حالت نخست

کافیست در دستور $s=\frac{1}{2}ac\sin B$ بجای c برابرش $\frac{a\sin C}{\sin A}$

را بگذاریم:

$$s=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin C\sin B}{\sin A}=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin(A+B)\sin B}{\sin A}$$

اگر سه پهلوی a و b و c از یک سه بر را بشناسیم نخست مثلاً در دستور

$s=\frac{1}{2}ab\sin C$ بجای C برابرش $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ را گذارده سپس بجای $\sin\frac{C}{2}$

و $\cos\frac{C}{2}$ برابرهای آنها را بحسب پهلوها میگذاریم (دستورهای ۴۳ و ۴۴):

$$s=\frac{1}{2}ab\sin C=ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=ab\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\times\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

و یا

$$(49)\qquad s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

اگر دو پهلو و گوشه روبروی یکی از آن دو مثلاً a و b و A را بشناسیم

(حالت دوم) نخست باید جزءهای ناشناس سه بر را بدست آورد و سپس مثلاً وقتی که C

بدست آمد دستور $s=\frac{1}{2}ab\sin C$ را بکار برد. میتوان نیز پس از بدست آوردن c

دستور (۴۹) را بکار برد

تبصره - میتوان دستور (۴۹) را بآسانی از راه هندسی بدست آورد:

در شکل شمارهٔ ۱۹ پهنهٔ سه بر ABC برابر است با مجموع پهنهٔ سه برهای AOB و BOC و COA

$$= \frac{AB \times OC'}{۲} + \frac{BC \times OA'}{۲} + \frac{CA \times OB'}{۲}$$

$$= \frac{c \times r}{۲} + \frac{a \times r}{۲} + \frac{b \times r}{۲}$$

$$= \frac{r.(a+b+c)}{۲} = rp$$

$$= p.\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

ورزش - حساب کنید پهنهٔ سه برهای ورزشهای پیش را (در هر چهار حالت گشایش سه برها).

ورزش

۱ حساب کنید پهنهٔ هم وبری (متوازی الاضلاعی را) که دو پهلوی آن a و b و گوشه میان آنها C میباشد

۲ - پهنهٔ یک سه گوشه متساوی الساقین $\frac{۱۰۰}{\sqrt{۳}}$ متر مربع و قاعدهٔ آن ۲۰ متر است حسا

کنید گوشه های آنرا.

۳- حساب کنید پرتو دایرهٔ محاطی سه گوشه ای را که پهلو های آن ۴ و ۵ و ۶ میباشد.

۴- زمینی است بشکل سه گوشه که یکی از پهلو های آن ۵۰۰ متر و دو گوشهٔ مجاور بدان پهلو

بترتیب ۵۴° و ۷۰° میباشد- این زمین چند هکتار است؟

۵- زمینی است بشکل سه گوشهٔ ABC که پهلو های آن $a = 1250$ متر و $b =$

یک کیلومتر $c = 1{,}5$ کیلومتر میباشد حساب کنید گوشهٔ C و پهنهٔ زمین را.

۶- دو نقطهٔ A و B در دو طرف دریاچه ای میباشند و میخواهیم دوری آنها را از همدیگر

اندازه بگیریم- برای اینکار نقطه ای C می گزینیم بطوریکه بشود دوری آنرا از A و B اندازه

گرفت:

$AC = 97{,}5$ $\qquad\qquad$ $BC = 83{,}25$

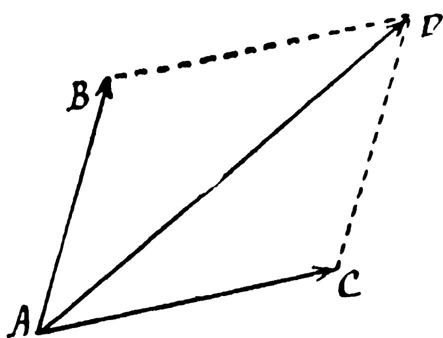
گوشه میان CA و CB را هم اندازه میگیریم: $\widehat{ACB} = 38°\ 47'$ حساب کنید

AB را.

۷- بر نقطه ای دو نیرو (قوه) وارد شده یکی برابر ۷ کیلوگرم و دیگری که با نیروی

نخست گوشهٔ ۳۸° میسازد برابر ۵ کیلوگرم پیدا کنید اندازه و راستای برآیند این دو نیرو را.

معمولاً یک نیرو را بوسیله برداری نمایش میدهند که راستا و سو و اندازه اش همان راستا و سو و اندازهٔ نیرو باشد - در فیزیک ثابت میشود که هرگاه دو بردار $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ نمایش دو نیروی وارد بر A باشد



اثر این دو نیرو برابر اثر تنها نیروئیست که بوسیله برآیند $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ نموده میشود و میدانیم این برآیند $\overrightarrow{AD}$ است

۸ - دو نیرو بر یک نقطه وارد میشوند و باهم گوشهٔ ۶۰ میسازند. یکی از آن دو نیرو دو کیلو و برآیند آن دو سه کیلو است. نیروی دیگر را حساب کنید.

۹ - برای یافتن دوری دو نقطه A و B از هم یک خطی از A به نقطهٔ C کشیده و AC و گوشه های $\widehat{CAB}$ و $\widehat{ACB}$ را اندازه گرفته ایم: $AC = 250$ متر $\widehat{CAB} = 61^\circ 20'$ و $\widehat{ACB} = 55^\circ 17'$ حساب کنید AB را.

۱۰ - از زیر پلی راه راستی افقی میگذرد - از روی این پل دو سنگ کیلومتر شمار پیاپی (که در یکطرف پل میباشند) دیده میشود: آنکه به پل نزدیکتر است با گوشهٔ نشیب $54^\circ 27'$ و آنکه دورتر است با گوشهٔ نشیب $5^\circ 34'$ (برای تعریف گوشهٔ نشیب کتاب مثلثات چهارم صفحهٔ ۴۸ را ببینید) حساب کنید بلندی پل را از راه.

۱۱ - برای یافتن بلندی یک بالن نگهبانی گوشهٔ فراز یکی از نقطه های آن C را از دو نقطهٔ

A و B که هر دو در دست میباشند - اندازه گرفته ایم - A و B و C هر سه در یک هامن شاغولی

میباشند. گوشهٔ فراز C از A $7^\circ 30'$ و از B که ۳۰۰ متر به خط شاغول C نزدیکتر است

گوشه فراز C $12^\circ 20'$ میباشد - حساب کنید بلندی بالون را

۱۲ - طرف شمالی شیروانی بامی به شیب 40° و به درازای ۵ متر است و طرف جنوبی آن

به درازای ۷ متر است - پهنای بام را از شمال بجنوب حساب کنید .

۱۳ - دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه ای واقعند و میخواهیم دوری آنها را از

همدیگر اندازه بگیریم - برای این کار در همان طرفی که A واقع است و ۵۰۰ متر دور از آن نقطه ای

C گرفته ایم و دو گوشهٔ $\widehat{CAB}$ و $\widehat{ACB}$ را اندازه گرفته ایم : $\widehat{CAB} = 52^\circ 25'$ و

$\widehat{ACB} = 68^\circ 50'$ حساب کنید AB را .

۱۴ - نردبانیست به شیب 37° و بدرازای ۶ متر که برای رفتن بالای آن در طرف دیگر آن نردبانی

به درازای شش متر و نیم نهاده اند - شیب نردبان را حساب کنید

۱۵ - بر نقطه ای دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ وارد میشود . گوشهٔ میان آنها $44^\circ 2'$ و اندازهٔ

$\vec{F_1}$ دو کیلو بوده برآیند آنها که برابر ۳٫۳۵۰ کیلو میباشد با $\vec{F_1}$ گوشه $21^\circ 3'$ میسازد حساب کنید

اندازه نیروی $\vec{F}$ را.

۱۶- دو نقطه A و B در دو طرف تپه‌ای واقعند و میخواهیم دوری آنها را از همدیگر اندازه بگیریم برای این کار از نقطه‌ای مانند C گوشه $\widehat{ACB}$ و درازاهای AC و BC را اندازه گرفته‌ایم: $\widehat{ACB} = 115° 25'$ و AC = ۳۷٫۷۰ متر و BC = ۶۷٫۸۵ متر حساب کنید AB را.

۱۷- برای اینکه دوری دو قایق A و B را از همدیگر حساب کنیم از نقطه C که در کنار دریاچه میباشد گوشه $\widehat{ACB}$ را اندازه گرفته‌ایم: $\widehat{ACB} = 40° 33'$ و میدانیم اگر در نقطه C تفنگی خالی کنند صدای آن پس از ½ ۱ ثانیه در A و پس از دو ثانیه در B شنیده میشود - حساب کنید AB را در صورتیکه بدانیم تندی صدا ۳۳۹ متر در ثانیه میباشد.

۱۸- در یک هم‌بر متوازی‌الاضلاع درازای یکی از پهلوها ۴٫۵ سانتیمتر و درازای یکی از دو گوشه بر (قطر) ۹۳ میلی‌متر است و گوشه میان دو گوشه بر (گوشه‌ایکه روبرو به پهلوی داده شده است) $25° 35'$ میباشد حساب کنید درازای پهلو و میان بر دیگر را - مسئله چند جواب دارد؟

۱۹- دو نفر که شش کیلومتر از همدیگر دورند و روبروی هم ایستاده‌اند بالونی را که با آنها در یک هامن (سطح) قائم است بگوشه‌های فراز ۶۲° و ۳۷° می‌بینند حساب کنید بلندی بالون و دوری آنرا از هر یک از این دو نفر.

۲۰- زمینی است بشکل سه گوشه ABC بطوریکه a = ۵٫۰۴۳ متر و b = ۴٫۰۳۲ متر و

Ĉ = ۱۰′ ۶۵° ارزش این زمین را حساب کنید درصورتیکه بدانیم هر هکتار آن ۱۰۰۰ ریال بیرزد (مسئله صفحه ۴ از مثلثات کلاس چهارم) .

۲۱- برآیند دو نیروی برابر هم ۵ کیلو و گوشه میان آن دو نیرو ۲۸′ ۴۶° است اندازه هر یک از آنها چیست؟

۲۲- میخواهیم دوری دو نقطه A و B را از همدیگر بیابیم چون از نقطه A نقطه B دیده نمیشود روی یک خط راستی که از A میگذرد دو نقطه C و D گرفته ایم هر دو در یک طرف A بطوریکه بتوان از آنجاها B را دید و بقسمی که AC = ۴۵ متر و AD = ۱۵۵ متر DĈB = ۳۷′ ۶۹° و CD̂B = ۲۳′ ۵۱°

حساب کنید AB را

۲۳- برآیند دو نیروی سه و پنج کیلوگرامی هفت کیلوگرم است حساب کنید گوشه میان دو نیرو را

۲۴- سه دایره دو بدو بهم مماسند و پرتو آنها برابر ۲ و ۵ و ۶ سانتیمتر. گوشه های میان خطهای مرکزهای این دایره ها را حساب کنید .

۲۵- گوشه برهای یک همدوبر برابر ۷ و ۸ سانتیمتر بوده گوشه میان آندو ۵۰′ ۴۸° است حساب کنید پهلوهای همدوبر را .

۲۶- برای اندازه گرفتن فاصله دو نقطه A و B که در دو طرف ساختمانی میباشند نقطه ای

گرفته CA و CB و گوشه $A\hat{C}B$ را اندازه گرفته ایم: CA = ۱۷٫۸۳۰ متر و CB = ۱۴٫۹۲۵ متر

و $C\hat{A}B$ = ۴۵ ۲۴ حساب کنید AB را.

۲۷ - در کنار دریاچه‌ای برجی است به بلندی ۴۵ متر و دو قایق A و B در دریاچه میباشند که میخواهیم فاصله آنها را از یکدیگر حساب کنیم - برای این کار گوشه نشیب قایق را از سر برج اندازه می‌گیریم یکی ۹ و دیگری ۱۲ است - و نیز از C پای برج گوشه افقی $A\hat{C}B$ را اندازه میگیریم $A\hat{C}B = 42^\circ$ حساب AB را.

۲۸ - مجسمه‌ای به بلندی سه متر روی پایه‌ای به بلندی چهار متر نصب است - از چه نقطه مجسمه و پایه بیک گوشه دیده میشوند؟

۲۹ - از دو نقطه A و B که در کنار رودخانه و در یکطرف آن میباشند نقطه‌ای C را که در کنار دیگر رودخانه است می‌بینیم - با فرض اینکه دوری A از B دویست متر باشد و گوشه‌هائیکه پرتوی (شعاع بصری) C از A و از B با AB میسازند بترتیب ۳۰ ۶ و ۳۰ ۴۵ باشد حساب کنید پهنای رودخانه را.

۳۰ - در کنار یک رودخانه تپه‌ایست و در بالای تپه برجی به بلندی ۳۰ متر بنا شده - از نقطه‌ای که کنار دیگر رودخانه و روبروی برج است گوشه‌های فراز پای برج و سر آن بترتیب ۴۰ ۲۵ و

۲۰ ′ ۲۹ میباشد حساب کنید پهنای رودخانه را .

۳۱ - هواپیمائی روی یک خط راست حرکت میکند و روی زمین دو نقطه A و B درست زیر این خط راست و بفاصلهٔ ۱۰۰۰ متر از همدیگر قرار دارند - در یک لحظه گوشهٔ فراز هواپیما از دو نقطه A و B بترتیب ′۸۰ و ′۱۸ و درست پس از ۱۵ ثانیه بترتیب ′۲۰ و ′۵۲ میباشد حساب کنید تندی هواپیما را بحسب کیلومتر در ساعت .

۳۲ - در ساعتی از روز که سایهٔ درختی ده متری چهارده متر میباشد چه اندازه خواهد بود سایهٔ یک تکه چوب دو متری که ده زینه از شاغول بسمت خورشید کج است ؟

۳۳ - زمینی داریم سه گوشه که دو بر آن به دو خیابانست یکی بدرازای ۴۳٫۵ متر و دیگری ۵۱٫۷۵ متر - دو خیابان با هم گوشهٔ ′۷۰ میسازند و هر متر مربع این زمین ۳۰۰ ریال ارزش دارد - حساب کنید اگر ۵۰۰۰ ریال داشته باشیم و بخواهیم باز هم از همین زمین بخریم چه اندازه میتوان بر ۴۳٫۵ متری را زیاد نمود بدون دست زدن به بر ۵۱٫۷۵ متری .

۳۴ - پیرامون سه گوشه ای ۷۰ متر و بلندی A از پهلوی BC (ارتفاع وارد از A بر BC) ۲۵ متر و گوشهٔ B برابر ′۴۷ ۳۲ است حساب کنید BC را .

۳۵ - شخصی که ۱٫۷۵ متر بلندی دارد و در کنار دریاچه ای ایستاده است ساختمانی را به گوشهٔ

فراز ۴۴° ۲۰′ و تصویر آن ساختمان را گوشه نشیب ۶° ۳۰′ می بینند. بلندی ساختمان را حساب کنید

۳۶ـ شخصی به بلندی ۱٫۸۰ متر روی برجی به بلندی ۱۵ متر ایستاده و میخواهد پهنای دریاچه ای را که نزدیک برج است اندازه بگیرد برای این کار گوشه نشیب نزدیکترین و دورترین نقطه های دریاچه را (هر دو نقطه با چشم بیننده در یک هامن شاغولی میباشد) اندازه میگیرد به ترتیب ۳۵° ۳۰′ و ۱۲° ۲۵′ است حساب کنید پهنای دریاچه را.

۳۷ـ زمینی است بشکل چهارگوشه ABCD که سه پهلوی آن را می شناسیم BC = ۷۳٫۷۰ متر CD = ۶۲٫۶۵ متر DA = ۳۵٫۴۷ متر ولی AB را نتوانسته ایم اندازه بگیریم گوشه های DAC و CBD را نیز داریم $\widehat{DAC}$ = ۲۱° ۲۳′ و $\widehat{CBD}$ = ۴۳° ۲۴′ حساب کنید AB را.

۳۸ـ میخواهیم ۵۰۰ متر مربع از زمینی را که دو بر آن به خیابانست بخریم یکی از دو بر مجاور بخیابان ۶۱ متر و گوشه میان دو خیابان ۸۰° است حساب کنید درازای بری را که در خیابان دیگر است بنا بر آنکه بخواهیم زمینی را که میخریم سه گوشه باشد.

۳۹ـ از سه بری a و b و گوشه A - B را می شناسیم آن سه بر را بگشائید

a = ۳۱۶٫۷۳ ، b = ۲۹۱٫۵۴ ، A - B = ۳۴° ۱۷′ ۱۵″

۴۰- از یک زنخی (ذوزنقه) دو قاعده AB و CD و دو گوشهٔ A و B داده میشود حساب کنید دو پهلوی دیگر را.

AB = ۶۵٫۳۵۲ متر   CD = ۴۷٫۶۸۰ متر

A = ۳۵° ۴۳' ۳۷"   B = ۴۴° ۱۷' ۶۳"

۴۱- دو پهلوی یک همروبر (متوازی الاضلاع) ۵۶۷ میلی متر و ۴۳ سانتیمتر و گوشهٔ میان آن دو پهلو ۴۹' ۵۴° میباشد- حساب کنید درازای گوشه بُر (قطر) های همروبر را.

۴۲- برای حساب کردن پهنهٔ زمینی که بشکل چهاربر ABCD است گوشه بُرهای آن AC و BD را کشیده ایم تا در O برخورد نمایند و OA و OB و OC و OD و گوشهٔ AOB را اندازه گرفته ایم بترتیب چنین است ۱۷ متر و ۲۲ متر و ۱۶ متر و ۱۴ متر و ۳۰' ۱۱۰° حساب کنید پهنهٔ این زمین را.

۴۳- از ایستگاهی دو ترن در یک آن بیرون میرود- یکی بسوی شمال و با تندی ساعتی ۴۵ کیلومتر و دیگری بسوی ۴۹° شمال خاوری با تندی ساعتی ۵۵ کیلومتر- حساب کنید فاصلهٔ دو ترن را پس از یکساعت و نیم.

۴۴- میخواهیم دوری دو نقطهٔ A و B را از یک نقطهٔ C اندازه بگیریم ولی چون

میان C و دو نقطه A و B رودخانه‌ایست چنین کرده‌ایم: AD را برابر ۸۰ متر در راستای CA و BE را برابر ۱۳۰ متر در راستای CB گرفته اندازه‌های AB و BD و DE را نیز معین کرده‌ایم: AB = ۱۴۷٫۵۰ متر BD = ۱۶۰٫۷۵ متر DE = ۲۵۱٫۳۰ متر CA و CB را حساب کنید.

۴۵ - گوشهٔ فراز کوهی از نقطهٔ A ۴۷° است ولی اگر روی راه راستی که شیب آن ۳۲° است ۱۰۰۰ متر بسوی کوه برویم تا به B برسیم گوشهٔ فراز کوه از B ۷۷° است. بلندی سر کوه را از A حساب کنید.

۴۶ - گوشهٔ فراز بالونی از نقطه‌ای A که در جنوب آن است ۴۷° ۱۸′ ۳۰″ و از نقطهٔ B که بفاصلهٔ ۳۳۵٫۷ متر از A و در خاور آنست ۱۴° ۱′ ۴″ میباشد. بلندی بالون را حساب کنید.

۴۷ - هرگاه پهلوهای یک سه‌بر a و b و c بترتیب سه جملهٔ از یک فرایاز (تصاعد) حسابی باشند خواهیم داشت:

$$tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

۴۸ - سایهٔ چوب باریکی که با افق گوشهٔ ۲۵° میسازد در هنگامی که خورشید ۳۷° بالای افق است (بفرض اینکه چوب و مرکز خورشید در یک هامن شاغولی باشند) ۸٫۷۵ متر میباشد. حساب کنید درازای چوب را.

۴۹ - سایهٔ درختی که در دامنهٔ تپه‌ایست به شیب ۱۸° - هنگامیکه این سایه در روی خط بزرگترین شیب دامنه افتاده - ۴۳ متراست حساب کنید بلندی درخت را بفرض اینکه در آن هنگام گوشهٔ فرازخورشید ۴۲° باشد.

۵۰ - اگر جادهٔ تهران به اصفهان راشمالی جنوبی بگیریم در ستی از راه که اطراف آن دشتی است افقی دو ده‌کده در دو طرف جاده واقع است که میخواهیم بدون بیرون شدن از راه دوری آنها را از همدیگر بیابیم برای این کار در دو نقطه از راه دو ساختمان A و B ازین دو ده‌کده را نشان می‌کنیم. از نقطه نخست (مثلا کیلومتر ۳۵۰) A در ۲۵° جنوب باختری و B در ۶۷° جنوب خاوری دیده میشود و از نقطهٔ دوم (کیلومتر ۳۷۰) A در ۴۵° شمال باختری و B در ۲۷° شمال خاوری. حساب کنید فاصلهٔ A B را.

۵۱ - از بالونی که در بلندی ۱۵۰۰ متراست نقطه‌ای از زمین بگوشهٔ نشیب ۲۷° ۴۰′ دیده میشود و اگر همین بالون با تندی یکنواخت شاغولی بالا رود پس از ۷ دقیقه همان نقطه با گوشهٔ نشیب ۱۸° ۴۵′ دیده خواهد شد حساب کنید تندی بالا رفتن بالون را بحسب کیلومتر در ساعت.

۵۲ - مجسمه‌ای به بلندی ۳٫۵ متر روی ستونی نصب است و پای آن ستون شخصی به بلندی ۱٫۷۵ متر ایستاده است - از یک نقطهٔ O که با پای ستون در یک هامن افقی است مجسمه

و آن شخص سر دو بیک گوشه دیده میشوند بلندی ستون را حساب کنید . میدانیم O سی متر از پای ستون دور است .

۵۳ - برای یافتن بلندی قلهٔ یک کوه خطی (مبنائی) میگیریم AB افقی و شمالی جنوبی . از A که در شمال است قلهٔ کوه در ۱۲° خاور شمالی و با گوشهٔ فراز ۲۷° ۳۵' دیده میشود و از B در ۴۹° ۳۰' شمال خاوری . بلندی قلهٔ کوه از AB چقدر است ؟

۵۴ - از بلندترین نقطه های یک کشتی که ۱۸ متر بالای آب است روشنائی یک فانوس دریائی تا ۵۳ کیلومتری آن دیده میشود حساب کنید بلندی فانوس دریائی را بفرض اینکه زمین گردی و پرتو آن ۶۳۶۶ کیلومتر باشد .

بخش پنجم

بکار بردن مثلثات در نقشه برداری

۲۳- از روی ورزش های پیش (از صفحه ۹۳ تا ۱۰۵) دیده میشود که بآسانی میتوان دوری دو نقطه را از همدیگر و یا بلندی یک برج یا کوه و یا پهنای یک رودخانه را حساب کرد:

اگر میان دو نقطه A و B مانعی (مانند دریاچه. رودخانه یا تپه) باشد بطوریکه نتوانیم AB را مستقیماً اندازه بگیریم راه عمل چنانست که در ورزش های ۶ و ۹ و ۱۳ و ۱۶ و ۲۲ و ۲۵ و ۲۷ گفته شده.

واگر به هیچکدام از دو نقطه A و B دسترسی نداشته باشیم (مثل اینکه بخواهیم از یکطرف رودخانه فاصلهٔ دو نقطه ای را که درطرف دیگر آنند اندازه بگیریم) مانند ورزشهای ۱۷ و ۲۷ و ۴۴ و ۵۰ عمل خواهیم نمود.

برای اندازه گرفتن بلندی یک برج اگر بتوانیم بپای برج برسیم راه عمل مانند ورزش های ۱۰ و ۱۱ و ۳۵ و ۴۹ و ۵۲ و ۵۴ است.

واگر نتوانیم بپای برج برسیم (چنانکه در مورد قلهٔ کوه هم نمی توان بپای آن رسید)،

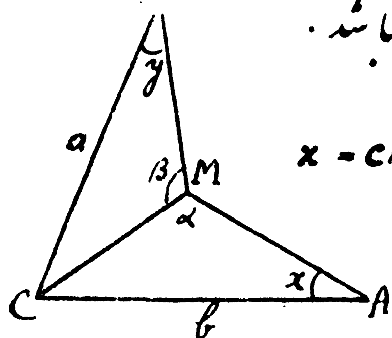
مانند ورزش های ۱۹ ، ۴۵ ، ۵۳ عمل خواهیم نمود.

راه یافتن پهنای رودخانه از ورزش های ۲۹ ، ۳۰ ، ۲۶ بدست میآید.

۲۴- مسئلهٔ نقشه - برای کشیدن نقشهٔ یک زمین میتوان براه زیر عمل نمود:

نخست سه نقطهٔ A و B و C از آن زمین را برمیگزینند بطوریکه بتوان CA و CB و گوشهٔ ACB را اندازه گرفت - بدین ترتیب جای A و B و C نسبت بیکدیگر در روی نقشه معین میشود (روشن است که فاصله ها عیناً روی نقشه برده نمی شود و هر نقشه مقیاسی دارد).

حال اگر بخواهند جای نقطه ای M را روی نقشه معین کنند با گوشه یاب گوشه های AMC و CMB را اندازه میگیرند و از آن رو با کمک دستورهای مثلثاتی اندازهٔ AM و BM و CM را حساب می کنند: در روی نقشه نقطهٔ M نقطهٔ برخورد سه دایره است که اندازهٔ پرتوهای آنها برابر اندازه های AM و BM و CM و مرکز آنها بترتیب A و B و C میباشد.



برای محاسبه می بینیم اگر بتوانیم گوشه های x = CAM و y = CBM را حساب کنیم در هریک از سه گوشه های

AMC و BMC دو گوشه و یک پهلو شناخته خواهد شد بنابرین پهلوهای AM و BM

و CM را از روی قضیه سینوسها حساب خواهیم کرد (حالت نخست اگشایش سه برها)

اگر CA و CB و ACB را بترتیب b و a و C و $\widehat{AMC}$

و $\widehat{CMB}$ را α و β بنامیم برای محاسبه x و y نخست داریم:

$$(S) \qquad x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + C)$$

سپس در سه گوشه های AMC و CMB بترتیب دو بستگی زیر

$$\frac{\sin x}{CM} = \frac{\sin \alpha}{b}$$

$$\frac{\sin y}{CM} = \frac{\sin \beta}{a}$$

و از روی این دو بستگی چنین برمیاید.

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}$$

و یا

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{a \sin\alpha - b \sin\beta}{a \sin\alpha + b \sin\beta}$$

و یا

$$(D) \qquad tg \frac{x-y}{2} = \frac{a \sin\alpha - b \sin\beta}{a \sin\alpha + b \sin\beta} \cdot tg \frac{x+y}{2}$$

از دو همچندی (S) و (D) x و y حساب میشود.

تبصره - برای اینکه طرف دوم بچندی (D) محاسبه پذیر با لگاریتم شود بفرض اینکه $a \sin \alpha < b \sin \beta$ باشد میتوان $\frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha}$ را برابر بسینوس متمم گوشه‌ای φ گرفت

$$\frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha} = \cos \varphi$$

و خواهیم داشت :

$$\frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{a \sin \alpha + b \sin \beta} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = tg^{2} \frac{\varphi}{2}$$

و بنابراین (D) نوشته میشود :

$$tg \frac{x - y}{2} = tg^{2} \frac{\varphi}{2} \cdot tg \frac{x + y}{2}$$

خط محمد افضلی

غلطنامه

صفحه	سطر	نادرست	درست
٤	۱۲	arc sina	Arc sina
۱۳	۱٤	۱-sinx)	(۱ + sinx)
۱٤	٥	$\underline{Cos^{۲} x}$	۱
»	۹	$\frac{۱}{۲}$ Cos a	$\frac{۱}{m}$ Cos a
»	۱۱	sina	sinx
»	۱۲	b −	b +
۱٦	٦	arc sinx	۳arc sinx
۱۷	۳	۲ ab	٤ ab
»	٦	$a^{۲}$ − $b^{۲}$	$a^{۲}$ − ۲$b^{۲}$
۲۰	۱	$Cos^{۲} x$	$Cos^{۲} \frac{x}{۲}$
۲۰	٦	٤ $sin^{۲}$ ۲x	٤ − ۳$sin^{۲}$ ۲x
۲۸	۸	۳٤	۳۳
۳۱	٤	D = ۲٦	D = ۲۷
٤٤	۸	Cosy	Cosx
٤٥	۳	Cos $\frac{y}{۲}$	sin $\frac{y}{۲}$
٤۰	۱۰	(۲٦)	(۳٦)
»	۱۱	(۲۷)	(۳۷)
»	۱۲	(۲۸)	(۳۸)
»	۱۳	(۲۹)	(۳۹)

صفحه	سطر	نادرست	درست
٦٤	۱	$(۱ + \cos \alpha$	$(۱ + \cos \alpha)$
۲۰	٤	بررا	سه بررا
۲٦	۸		$۳,۱٥٦ = b$
۲۷	۱۱	sinb	sin B
۹۳	٤	در طرف چپ نشانهٔ = باید s نوشت	
۹٤	۱۳ — ۱٤	با نیروی نخست گوشهٔ °۳۸	
۱۰٤	۹	A	AB
۱۰٥	۱۰	متر	متری

کتب خانہ جامعہ عثمانیہ

۱۔ اراکین مجلس اعلیٰ، مجلس [ارشاد]، مجلس انتظامی، مجالس تنقیحات و نصاب پانچ کتابیں ایک ماہ تک اپنے پاس رکھ سکیں گے۔

۲۔ اساتذہ جامعہ عثمانیہ و کلیہ جات ملحقہ و گزیٹیڈ عہدہ داران جامعہ اور اراکین دارالترجمہ دس کتابیں ایک ماہ تک اپنے پاس رکھ سکیں گے اور [illegible] سے

۳۔ طلبا ایم اے، ایل ایل بی و تحقیقاتی جماعت تین کتابیں اپنے پاس رکھ سکیں گے اور [illegible] طلبا دو کتابیں [illegible] طلبہ پانچ کتابیں [illegible] طلبہ سے جواب

۴۔ مدت مقررہ پر کتابیں واپس نہ ہوں تو ایک آنہ یومیہ فی کتاب جرمانہ لیا جائیگا۔

۵۔ بغیر اطلاع کتابیں گم کر دی جائیں گی تو [illegible] کتاب کا لانا لازم ہے۔

۶۔ کتابیں گم ہو جائیں تو [illegible] ادا کرنا ہوگا۔

۷۔ کتابوں پر کسی قسم کا نشان بنایا [illegible] سے [illegible]

۸۔ قلمی نسخے اور نادر کتابیں [illegible] جا سکیں گی۔ فقط